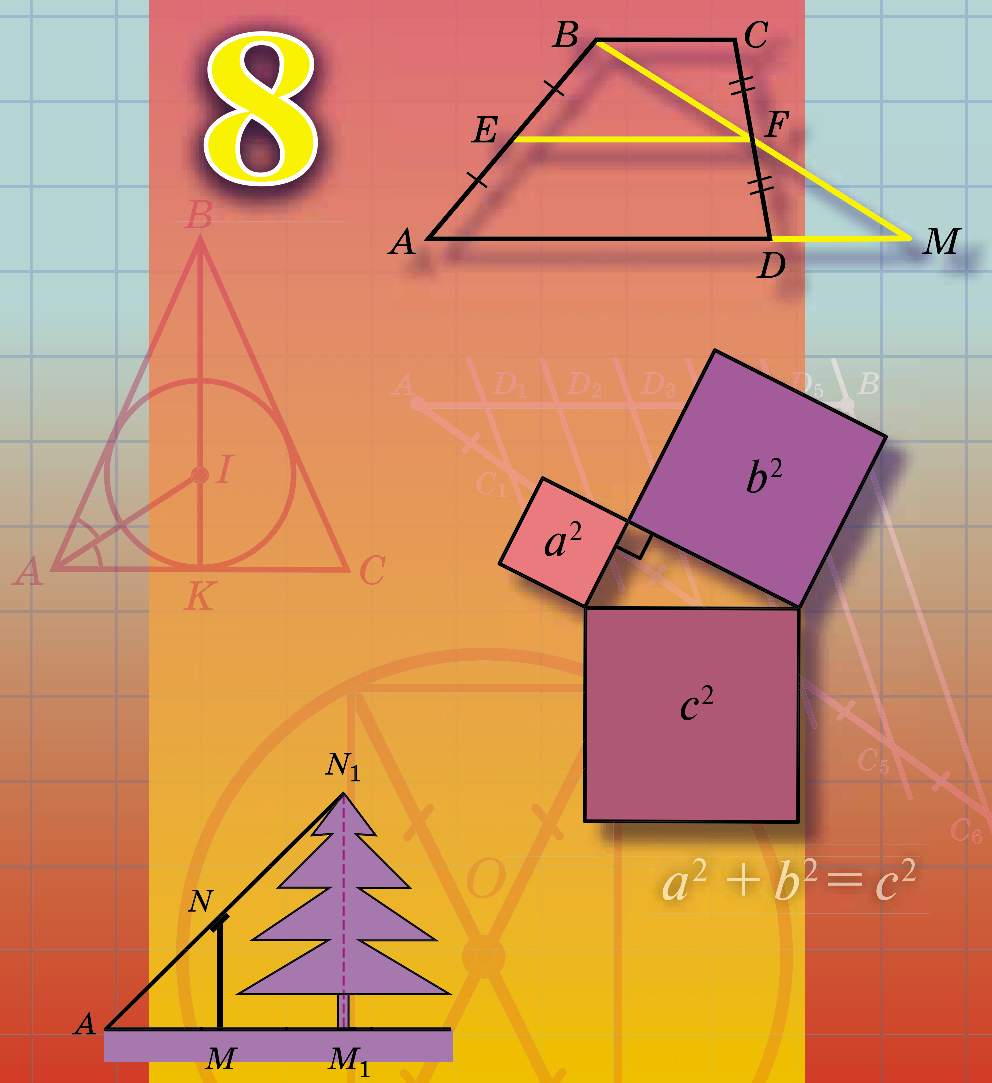
О.С. Істер

ГЕОМЕТРІЯ

8



УДК 514(075.3)
ББК 22.151я721
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(Наказ Міністерства освіти і науки України
від 10.05.2016 № 491)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Експерти, які здійснили експертизу підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для учнів 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Дунай С.М., учитель спеціалізованої загальноосвітньої середньої школи № 1 з поглибленим вивченням іноземних мов м. Чернігова;

Тесленко О.В., методист методичного центру Управління освіти адміністрації Комінтернівського району Харківської міської ради;

Чорний В.З., завідувач кафедри математики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету ім. Володимира Гнатюка, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Істер О.С.
І-89 Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. — Київ : Генеза, 2016. — 216 с.

ISBN 978-966-11-0701-3.

Підручник відповідає новій програмі з математики, містить достатню кількість диференційованих вправ та прикладних задач. Після кожного розділу наведено вправи для його повторення. Для підготовки до контрольної роботи передбачено «Домашню самостійну роботу» та «Завдання для перевірки знань». Наприкінці підручника наведено матеріал для повторення курсу геометрії 7 класу, задачі підвищеної складності, предметний покажчик та відповіді до більшості вправ. Для найдопитливіших є низка нестандартних задач у рубриці «Цікаві задачі для учнів неледачих» та додатковий матеріал.

УДК 514(075.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-966-11-0701-3

Шановні восьмикласники!

У цьому навчальному році ви продовжите вивчати геометрію, а підручник, який ви тримаєте в руках, допоможе вам у цьому.

Під час вивчення теоретичного матеріалу зверніть увагу на текст, надрукований **жирним** шрифтом. Його треба запам’ятати.

У підручнику ви побачите умовні позначення. Ось що вони означають:

– означення, важливі геометричні твердження (аксіоми, теореми, властивості);

– запитання до вивченого теоретичного матеріалу;

– закінчення доведення теореми або задачі;

– «ключова» задача, висновки якої використовуються під час розв’язування інших задач;

– вправи для повторення;

– рубрика «Розв’яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»;

– вправи підвищеної складності;

– рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих» та додатковий матеріал.

Чорним кольором позначено номери вправ для розв’язування у класі, а **синім** – для розв’язування вдома.

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки 1 починаються вправи початкового рівня;

з позначки 2 починаються вправи середнього рівня;

з позначки 3 починаються вправи достатнього рівня;

з позначки 4 починаються вправи високого рівня.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника – «Завдання для перевірки знань за курс геометрії 8 класу» та «Задачі підвищеної складності». Заняття геометрією стануть ще цікавішими, якщо ви розв'язуватимете вправи рубрики «Цікаві задачі для учнів неледачих».

Пригадати раніше вивчене вам допоможуть «Відомості з курсу геометрії 7 класу» та «Вправи на повторення курсу геометрії 7 класу», які розміщено в кінці підручника.

Автор намагався подати теоретичний матеріал підручника простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу у школі його обов'язково потрібно доопрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість із них ви розглянете на уроках і під час домашньої роботи; інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

У кінці підручника в додатку під назвою «Готуємося до ЗНО» подано добірку задач, що в різні роки пропонувалися абітурієнтам на зовнішньому незалежному оцінюванні з математики, для розв'язання яких достатньо знань з геометрії за 8-й клас. Розв'язавши ці задачі, ви зробите ще один крок уперед для успішної підготовки до майбутніх випробувань, які чекатимуть на вас під час вступу до омріяного вишу.

Цікаві факти з історії розвитку геометрії як науки ви знайдете у рубриці «А ще раніше...»

Бажаю успіхів в опануванні курсу!

Шановні вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня індивідуалізації тощо. Вправи, що не розглядалися на уроці, можна використати на додаткових, факультативних та індивідуальних заняттях.

Додаткові вправи у «Завданнях для перевірки знань» призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших учнів. Правильне їх розв'язання вчитель може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів та задачі з додатка «Готуємося до ЗНО» можна запропонувати учням, наприклад, під час узагальнюючих уроків з теми або повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

Організувати повторення курсу геометрії 7 класу на початку навчального року та пригадати відповідний теоретичний матеріал можна, запропонувавши учням розв'язати «Вправи на повторення курсу геометрії 7 класу» та прочитати відповідні теоретичні відомості, які розміщено у кінці підручника.

Шановні батьки!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати цей матеріал за підручником удома. Спочатку бажано, щоб вона прочитала теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою та проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього – розв'язати задачі і вправи, що їй посильні, з розглянутого параграфа.

Упродовж опрацювання дитиною курсу геометрії 8 класу ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

У кінці підручника «Задачі підвищеної складності» допоможуть вашій дитині поглибити знання з геометрії та підготуватися до математичних змагань.

Розділ 1 ЧОТИРИКУТНИКИ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** поняття прямокутника і квадрата;
- **дізнаєтеся** про паралелограм та його властивості, трапецію; центральні та вписані кути; вписані та описані чотирикутники; середню лінію трикутника та середню лінію трапеції; теорему Фалеса;
- **навчитеся** обґрунтовувати належність чотирикутника до певного виду, застосовувати вивчені означення і властивості до розв'язування задач.

§ 1. ЧОТИРИКУТНИК, ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ. СУМА КУТІВ ЧОТИРИКУТНИКА

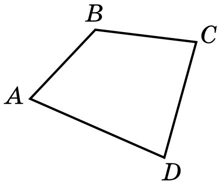
Чотирикутником **називають фігуру, що складається з чотирьох точок і чотирьох відрізків, які послідовно їх сполучають.**

Ніякі три з даних точок не повинні лежати на одній прямій, а відрізки, які їх сполучають, не повинні мати жодних інших спільних точок, крім даних.

Будь-який чотирикутник обмежує певну частину площини, яка є внутрішньою областю чотирикутника.

На малюнку 1 зображено чотирикутник $ABCD$. Точки A, B, C, D називають ***вершинами*** чотирикутника, а відрізки AB, BC, CD і DA, що їх сполучають, – ***сторонами*** чотирикутника.

Вершини чотирикутника, які є кінцями однієї його сторони, називають ***сусідніми***, несусідні вершини називають ***протилежними***. На мал. 1 вершини A і B – сусідні, A і C – протилежні.

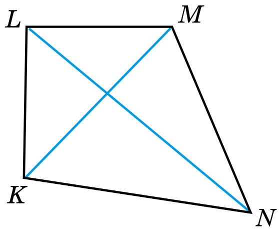


Мал. 1

Сторони чотирикутника, які мають спільну вершину, називають ***сусідніми*** або ***суміжними***, а які не мають спільної вершини, – ***протилежними***. На мал. 1 сторони AB і BC – сусідні (суміжні), сторони AB і CD – протилежні.

Суму довжин усіх сторін чотирикутника називають його ***периметром***. Периметр позначають літерою P. Наприклад, периметр чотирикутника $ABCD$ можна позначити як P_{ABCD}:

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA.$$

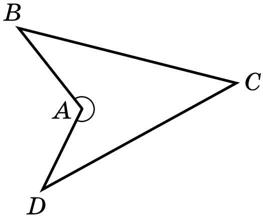


Мал. 2

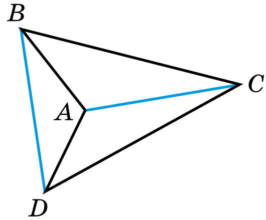
Відрізки, які сполучають протилежні вершини чотирикутника, називають ***діагоналями*** чотирикутника. На мал. 2 відрізки KM і LN – діагоналі чотирикутника $KLMN$. Будь-який чотирикутник має дві діагоналі.

Кутами чотирикутника $ABCD$ називають кути DAB, ABC, BCD і CDA (мал. 1). Кути чотирикутника називають ***протилежними***, якщо їх вершини – протилежні вершини чотирикутника, і ***сусідніми***, якщо їх вершини – сусідні вершини чотирикутника. На малюнку 1 кути A і C – протилежні, A і B – сусідні.

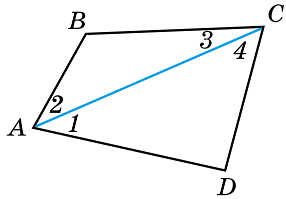
Один з кутів чотирикутника може бути більшим за розгорнутий. Наприклад, на малюнку 3 кут A чотирикутника $ABCD$ є більшим за розгорнутий. Такий чотирикутник називають ***неопуклим***. Якщо ж усі кути чотирикутника менші від 180°, то його називають ***опуклим***. Діагоналі опуклого чотирикутника перетинаються (мал. 2), а неопуклого не перетинаються (мал. 4).



Мал. 3



Мал. 4



Мал. 5

Т е о р е м а (про суму кутів чотирикутника). **Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.**

Д о в е д е н н я. Нехай $ABCD$ – деякий чотирикутник. Проведемо в ньому діагональ AC (мал. 5). Тоді $\angle A = \angle 1 + \angle 2$, $\angle C = \angle 3 + \angle 4$. Враховуючи, що $\angle 2 + \angle B + \angle 3 = 180°$ (як сума кутів ΔABC), $\angle 1 + \angle D + \angle 4 = 180°$ (як сума кутів ΔADC), матимемо: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = \angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle 3 +$ $+ \angle 4 + \angle D = (\angle 2 + \angle B + \angle 3) + (\angle 1 + \angle D + \angle 4) = 180° + 180° =$ $= 360°$. ▲

Задача. Знайдіть кути чотирикутника, якщо їх градусні міри відносяться як 3 : 10 : 4 : 1. Опуклим чи неопуклим є цей чотирикутник?

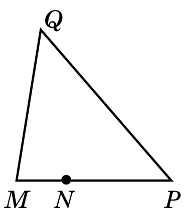
Р о з в’ я з а н н я. Нехай кути чотирикутника дорівнюють $3x$, $10x$, $4x$ і x. Маємо рівняння $3x + 10x + 4x + x = 360$, звідки $x = 20$. Отже, кути чотирикутника дорівнюють $3 \cdot 20° = 60°$, $10 \cdot 20° = 200°$, $4 \cdot 20° = 80°$ і $20°$. Оскільки один з кутів чотирикутника більший за $180°$, то цей чотирикутник – неопуклий.

В і д п о в і д ь. 60°, 200°, 80°, 20°; неопуклий.

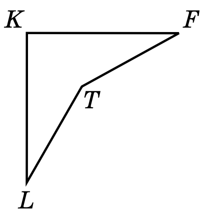
1. Яку фігуру називають чотирикутником?
2. Що називають вершинами чотирикутника, сторонами чотирикутника?
3. Які вершини чотирикутника називають сусідніми, які – протилежними?
4. Що таке діагоналі чотирикутника?
5. Які сторони чотирикутника називають сусідніми, які – протилежними?
6. Що називають периметром чотирикутника?
7. Що називають кутами чотирикутника?
8. Які кути чотирикутника називають протилежними, а які – сусідніми?
9. Який чотирикутник називають неопуклим, а який – опуклим?
10. Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів чотирикутника.

Початковий рівень

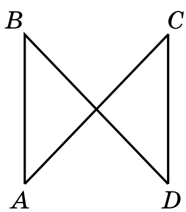
1. (Усно.) Які з фігур (мал. 6–9) є чотирикутниками? Назвіть опуклі та неопуклі чотирикутники.



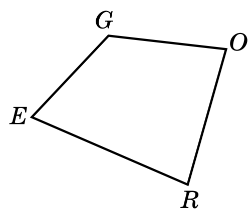
Мал. 6



Мал. 7



Мал. 8



Мал. 9

2. Назвіть пари протилежних сторін чотирикутника $EGOR$ (мал. 9), пари сусідніх сторін. Назвіть пари сусідніх вершин цього чотирикутника, пари протилежних вершин.

3. Накресліть чотирикутник $KLMN$. Назвіть пари його протилежних сторін, сусідніх сторін, протилежних вершин, сусідніх вершин. Проведіть діагоналі цього чотирикутника.

4. Накресліть опуклий чотирикутник $ABCD$ і неопуклий $PMLK$. Проведіть діагональ у кожному з них.

5. Чи існує чотирикутник з кутами:
1) 80°, 90°, 100° і 110°; 2) 150°, 60°, 70° і 80°?

6. Чи можуть кути чотирикутника дорівнювати:
1) 120°, 80°, 90° і 70°; 2) 130°, 110°, 80° і 50°?

2 Середній рівень

7. Знайдіть четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють:
1) 150°, 110° і 80°; 2) 80°, 60° і 30°.
Яким – опуклим чи неопуклим – є кожний чотирикутник?

8. Знайдіть четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють:
1) 20°, 70° і 80°; 2) 120°, 50° і 40°.
Яким – опуклим чи неопуклим – є кожний чотирикутник?

9. Знайдіть периметр чотирикутника, сторони якого дорівнюють 32 мм, 2,5 см, 0,4 дм і 0,07 м.

10. Знайдіть периметр чотирикутника, сторони якого дорівнюють 0,08 м, 0,7 дм, 6,3 см і 54 мм.

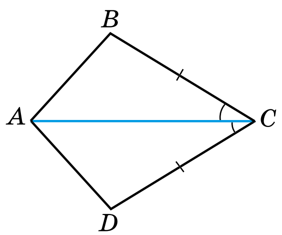
11. Чи можуть усі кути чотирикутника бути: 1) гострими; 2) прямими; 3) тупими?

12. Один з кутів чотирикутника дорівнює 120°, а інші – між собою рівні. Знайдіть невідомі кути чотирикутника.

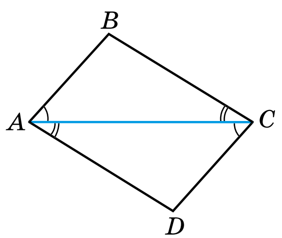
13. Периметр чотирикутника дорівнює 60 см, а одна з його сторін – 24 см. Знайдіть невідомі сторони чотирикутника, якщо вони між собою рівні.

14. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 10) $BC = CD$ і $\angle ACB = \angle ACD$. Доведіть, що $\angle B = \angle D$.

15. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 11) $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle BCA = \angle CAD$. Доведіть, що $AB = CD$.



Мал. 10



Мал. 11

3 Достатній рівень

16. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 4, 5, 8 і 9, а периметр чотирикутника дорівнює 65 см.

17. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 4, 5, 7 і 8.

18. Знайдіть невідомі кути чотирикутника, якщо один з них дорівнює $90°$, другий і третій відносяться як 7 : 5, а четвертий дорівнює півсумі другого та третього.

19. Знайдіть невідомі сторони чотирикутника, периметр якого дорівнює 54 см, одна зі сторін 18 см, друга та третя відносяться як 7 : 3, а четверта дорівнює піврізниці другої та третьої.

20. Доведіть, що в кожному чотирикутнику є кут, не більший за $90°$.

21. Доведіть, що в кожному чотирикутнику є кут, не менший від $90°$.

22. Чи може кут чотирикутника бути більшим за суму інших його кутів?

4 Високий рівень

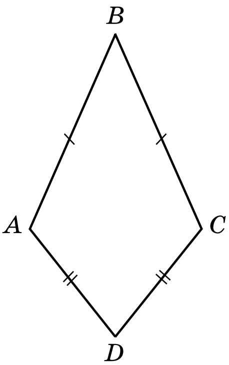
23. Побудуйте чотирикутник зі сторонами 6 см, 6 см, 3 см, 4 см та кутом $50°$ між рівними сторонами. Скільки розв'язків має задача?

24. Побудуйте чотирикутник зі сторонами 5 см, 5 см, 4 см, 3 см та кутом $70°$ між рівними сторонами. Скільки розв'язків має задача?

25. Опуклий чотирикутник називають *дельтоїдом*, якщо він має дві пари рівних сусідніх сторін (мал. 12). Доведіть, що:

1) діагональ BD ділить навпіл як кут B, так і кут D;

2) діагоналі дельтоїда взаємно перпендикулярні.



Мал. 12

26. Периметр чотирикутника $ABCD$ дорівнює 29 см, периметр трикутника ADB – 20 см, а трикутника CDB – 21 см. Знайдіть довжину діагоналі BD.

Вправи для повторення

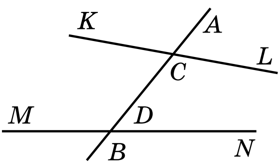
27. Градусна міра одного з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 70°. Знайдіть градусні міри решти семи кутів.

28. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них дорівнює 70°. Скільки розв'язків має задача?

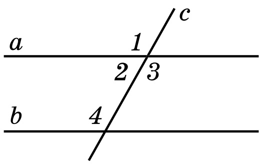
29. У прямокутному трикутнику гострий кут дорівнює 60°, а сума меншого катета і медіани, проведеної до гіпотенузи, – 10 см. Знайдіть гіпотенузу цього трикутника.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

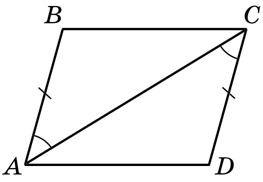
30. Пряма AB є січною для прямих KL і MN (мал. 13). Запишіть усі пари внутрішніх односторонніх кутів, внутрішніх різносторонніх кутів та відповідних кутів.



Мал. 13



Мал. 14



Мал. 15

31. Яким є взаємне розміщення прямих a і b (мал. 14), якщо:

1) $\angle 2 + \angle 4 = 180°$;
2) $\angle 1 > \angle 4$;
3) $\angle 3 = 120°$; $\angle 4 = 121°$;
4) $\angle 2 = 60°$; $\angle 4 = 119°$;
5) $\angle 1 = \angle 4 = 122°$;
6) $\angle 3 = \angle 4$?

32. 1) Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle CDA$ (мал. 15), якщо $AB = CD$ і $\angle BAC = \angle ACD$.

2) Доведіть, що $BC = AD$ і $\angle BCA = \angle CAD$.

3) Чи паралельні прямі BC і AD?

Цікаві задачі для учнів неледачих

33. (*Всеукраїнська олімпіада з математики, 1964 р.*) Знайдіть найбільше значення n, при якому n точок можна розмістити на площині так, щоб кожні три з них були вершинами прямокутного трикутника.

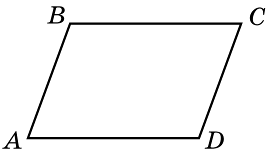
§ 2. ПАРАЛЕЛОГРАМ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ Й ОЗНАКИ

Паралелограмом **називають чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.**

На малюнку 16 зображено паралелограм $ABCD$, де $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

Розглянемо *властивості паралелограма*.

1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180°.



Мал. 16

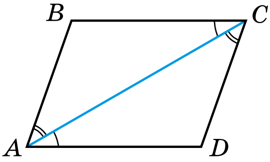
Справді, наприклад кути A і B паралелограма $ABCD$ (мал. 16) є внутрішніми односторонніми кутами для паралельних прямих AD і BC та січної AB. Тому $\angle A + \angle B = 180°$. Аналогічно цю властивість можна довести для будь-якої іншої пари сусідніх кутів паралелограма.

2. Паралелограм є опуклим чотирикутником.

Оскільки $\angle A + \angle B = 180°$, то $\angle A < 180°$, $\angle B < 180°$. Аналогічно $\angle C < 180°$, $\angle D < 180°$. Тому паралелограм – опуклий чотирикутник.

3. У паралелограмі протилежні сторони рівні й протилежні кути рівні.

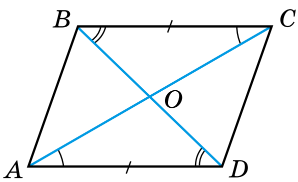
Д о в е д е н н я. Розглянемо паралелограм $ABCD$ (мал. 17). Діагональ AC розбиває його на два трикутники ABC і ADC. AC – спільна сторона цих трикутників й $\angle CAD = \angle ACB$, $\angle CAB = \angle ACD$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині січною AC паралельних прямих AD і BC, AB і CD відповідно). Тоді $\triangle ABC = \triangle CDA$ (за стороною і двома прилеглими кутами). Отже, $AB = CD$, $BC = AD$ і $\angle B = \angle D$ (як відповідні елементи рівних трикутників). Оскільки $\angle BAC + \angle CAD = \angle BCA + \angle DCA$, то $\angle BAD = \angle BCD$. ▲



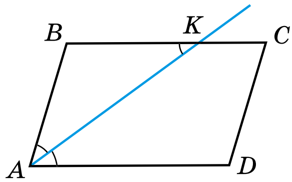
Мал. 17

4. Периметр паралелограма $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.
5. Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

Д о в е д е н н я. Нехай O – точка перетину діагоналей AC і BD паралелограма $ABCD$ (мал. 18). $AD = BC$ (як протилежні сторони паралелограма), $\angle CAD = \angle ACB$, $\angle BDA = \angle DBC$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січними AC і BD відповідно). Отже, $\triangle AOD = \triangle COB$ (за стороною і двома прилеглими кутами). Тоді $AO = OC$, $BO = OD$ (як відповідні сторони рівних трикутників). ▲



Мал. 18



Мал. 19

Задача 1. Д а н о: $ABCD$ паралелограм, AK – бісектриса кута A, $BK = 5$ см, $KC = 3$ см (мал. 19). З н а й д і т ь: P_{ABCD}.

Р о з в' я з а н н я. 1) $BC = BK + KC = 5 + 3 = 8$ (см);

2) $\angle KAD = \angle BKA$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січною AK);

3) $\angle KAD = \angle KAB$ (за умовою), тоді $\angle BKA = \angle KAB$. Отже, за ознакою рівнобедреного трикутника: $\triangle ABK$ – рівнобедрений, $AB = BK = 5$ (см);

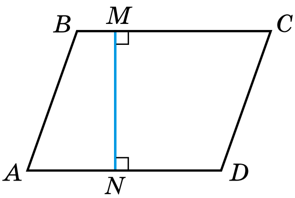
4) $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(5 + 8) = 26$ (см).

В і д п о в і д ь. 26 см.

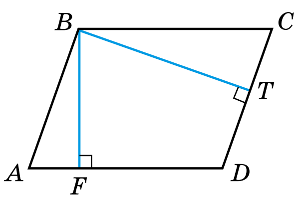
Висотою паралелограма **називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки сторони паралелограма до прямої, що містить протилежну сторону.**

На малюнку 20 MN – висота паралелограма; $MN \perp AD$, $MN \perp BC$.

З кожної вершини паралелограма можна провести дві висоти. Наприклад, на малюнку 21 BF і BT – висоти паралелограма, проведені відповідно до сторін AD і CD.



Мал. 20



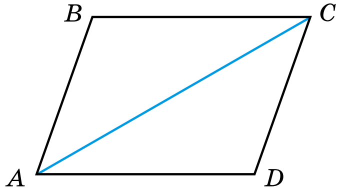
Мал. 21

Розглянемо *ознаки паралелограма.*

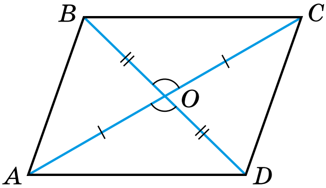
Т е о р е м а (ознаки паралелограма). **Якщо в чотирикутнику: 1) дві сторони рівні і паралельні, або 2) протилежні сторони попарно рівні, або 3) діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, або 4) протилежні кути попарно рівні, – то чотирикутник є паралелограмом.**

Д о в е д е н н я. 1) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AD = BC$ і $AD \parallel BC$ (мал. 22). Проведемо діагональ AC. Розглянемо $\triangle CAD$ і $\triangle ACB$. $\angle CAD = \angle BCA$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січною AC). AC – спільна сторона, $AD = BC$ (за умовою). Отже, $\triangle CAD = \triangle ACB$ (за двома сторонами і кутом між ними). Тоді $\angle ACD = \angle CAB$ (як відповідні). Але це різносторонні кути, що утворилися при перетині прямих AB і CD січною AC. Тому $AB \parallel CD$ (за ознакою паралельності прямих). Отже, у чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно паралельні. Тому $ABCD$ – паралелограм.

2) Нехай у чотирикутнику $ABCD$: $AD = BC$ і $AB = CD$ (мал. 22). Проведемо діагональ AC. Тоді $\triangle CAD = \triangle ACB$ (за трьома сторонами). Тому $\angle ACD = \angle CAB$, а отже, $AB \parallel CD$ (за ознакою паралельності прямих). Аналогічно доводимо, що $AD \parallel BC$. Отже, $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 22



Мал. 23

3) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD перетинаються в точці O і $AO = OC$, $BO = OD$ (мал. 23). $\angle AOD = \angle COB$ (як вертикальні). Тому $\triangle AOD = \triangle COB$ (за двома сторонами і кутом між ними). Звідси $AD = BC$. Аналогічно доводимо, що $AB = CD$. Зважаючи на п. 2) цієї теореми, приходимо до висновку, що $ABCD$ – паралелограм.

4) Нехай у паралелограмі $ABCD$: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ (мал. 16). Оскільки $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$, то $\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 360°$, $2(\angle A + \angle B) = 360°$; $\angle A + \angle B = 180°$. Але $\angle A$ і $\angle B$ – внутрішні різносторонні кути для прямих AD і BC та січної AB. Тому $AD \parallel BC$ (за ознакою паралельності

прямих). Аналогічно доводимо, що $AB \parallel CD$. Отже, $ABCD$ – паралелограм. ▲

Задача 2. У чотирикутнику $ABCD$, $AD = BC$, $\angle CAD = \angle ACB$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.

Д о в е д е н н я. Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник (мал. 22). Розглянемо $\triangle CAD$ і $\triangle ACB$. AC – їх спільна сторона, $AD = BC$, $\angle CAD = \angle ACB$ (за умовою). Отже, $\triangle CAD = \triangle ACB$ (за двома сторонами і кутом між ними). Тому $AB = CD$. Але тоді у чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно рівні, тому він є паралелограмом. ▲

А ще раніше...

Про деякі види чотирикутників (квадрати, прямокутники, рівнобічні та прямокутні трапеції) знали ще давньоєгипетські та вавилонські математики.

Термін «паралелограм» грецького походження, вважають, що його уведено Евклідом (близько 300 р. до н. е.). Також відомо, що про паралелограм і деякі його властивості було відомо учням школи Піфагора («піфагорійцям») ще раніше.

В «Началах» Евкліда доведено наступну теорему: *у паралелограмі протилежні сторони рівні і протилежні кути рівні, а діагональ поділяє його навпіл*, але не згадується про те, що точка перетину діагоналей паралелограма ділить кожну з них навпіл.

Евклід також не згадує ані про прямокутник, ані про ромб.

Повну теорію паралелограмів було розроблено лише в кінці Середньовіччя, а в підручниках вона з'явилася в XVII ст. Усі теореми та властивості паралелограма в цих підручниках ґрунтувалися на аксіомі паралельності Евкліда.

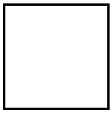
Термін «діагональ» – грецького походження; «діа» означає «через», а «гоніос» – «кут», що можна розуміти як відрізок, що сполучає вершини кутів.

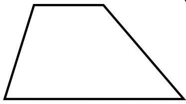
Слід зазначити, що Евклід, як і більшість математиків того часу, для назви відрізка, що сполучає протилежні вершини чотирикутника, зокрема прямокутника, використовував інший термін – «діаметр». Це можна пояснити тим, що перші геометри свої міркування ґрунтували на вписаних у коло прямокутниках. У Середні віки для назви згаданого відрізка використовували обидва терміни. Лише у XVIII ст. термін «діагональ» став загальновживаним.

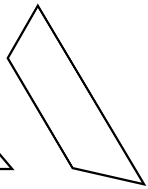
1. Яку фігуру називають паралелограмом?
2. Сформулюйте і доведіть властивості паралелограма.
3. Що називають висотою паралелограма?
4. Сформулюйте і доведіть ознаки паралелограма.

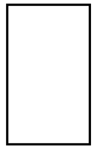
1 Початковий рівень

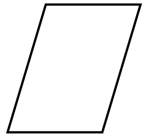
34. Серед чотирикутників, зображених на малюнках 24–29, укажіть паралелограми.

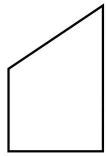

Мал. 24


Мал. 25


Мал. 26


Мал. 27


Мал. 28


Мал. 29

35. Накресліть паралелограм $ABCD$, у якого кут D тупий.

36. Накресліть паралелограм $KLMN$, у якого кут K гострий.

37. (Усно.) Одна зі сторін паралелограма дорівнює 5 см. Яка довжина сторони, що їй протилежна?

38. Один з кутів паралелограма дорівнює 70°. Знайдіть інші його кути.

39. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них дорівнює 100°.

2 Середній рівень

40. Знайдіть периметр паралелограма, у якого одна сторона дорівнює 12 см, а друга – на 3 см більша за неї.

41. Знайдіть периметр паралелограма, у якого одна сторона дорівнює 18 см, а друга – удвічі від неї менша.

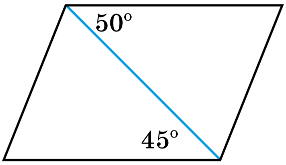
42. Знайдіть усі кути паралелограма, якщо:
1) сума двох з них дорівнює 120°;
2) один з них на 20° більший за другий;
3) один з них утричі менший від другого;
4) два з них відносяться як 2 : 3.

43. Знайдіть усі кути паралелограма, якщо:
1) сума двох з них дорівнює 200°;
2) один з них на 40° менший від другого;
3) один з них удвічі більший за другий;
4) градусні міри двох з них відносяться як 4 : 5.

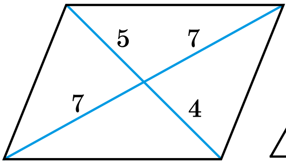
44. У паралелограмі $ABCD$ $\angle BAD = 80°$, $\angle ACD = 50°$. Знайдіть $\angle ACB$ і $\angle ABC$.

45. У паралелограмі $ABCD$ $\angle BAC = 35°$, $\angle BCA = 40°$. Знайдіть кути паралелограма.

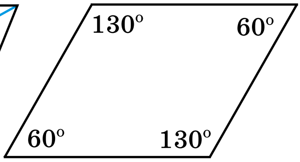
46. (Усно.) Які помилки допущено в зображенні паралелограма на малюнках 30–32?



Мал. 30



Мал. 31



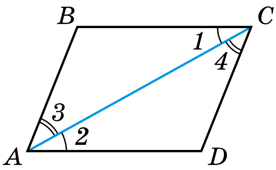
Мал. 32

47. Периметр паралелограма дорівнює 40 см. Знайдіть його сторони, якщо:
1) одна з них на 4 см більша за другу;
2) вони відносяться як 3 : 7.

48. Периметр паралелограма дорівнює 36 дм. Знайдіть його сторони, якщо:
1) одна з них на 2 дм менша від другої;
2) одна з них у 5 разів більша за другу.

49. O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайдіть діагональ AC, якщо $BD = 20$ см, $AB = 15$ см, а периметр трикутника AOB дорівнює 32 см.

50. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 33) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 33

51. $\triangle ABC = \triangle CDA$ (мал. 33). Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.

52. Побудуйте паралелограм за двома сторонами і кутом між ними.

53. Побудуйте паралелограм за двома сторонами і діагоналлю.

3 Достатній рівень

54. Бісектриса кута паралелограма перетинає його сторону під кутом 48°. Знайдіть кути паралелограма.

55. У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A ділить сторону BC на відрізки $BM = 5$ см і $MC = 7$ см. Знайдіть периметр паралелограма.

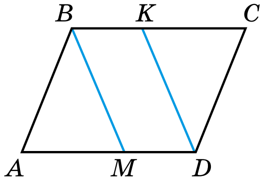
56. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 4$ см, $BC = 12$ см. Бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці P. Знайдіть BP і PC.

57. Побудуйте паралелограм за стороною і діагоналями.

58. Побудуйте паралелограм за двома діагоналями і кутом між ними.

59. На сторонах AD і BC паралелограма $ABCD$ (мал. 34) позначено точки M і K так, що $\angle ABM = \angle CDK$. Доведіть, що $BMDK$ – паралелограм.

60. На сторонах AD і BC паралелограма $ABCD$ (мал. 34) позначено точки M і K так, що $AM = KC$. Доведіть, що $BMDK$ – паралелограм.



Мал. 34

61. Доведіть, що бісектриси двох сусідніх кутів паралелограма взаємно перпендикулярні.

62. У паралелограмі гострий кут дорівнює 60°. Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, ділить протилежну сторону на відрізки 3 см і 5 см, починаючи від вершини гострого кута. Знайдіть периметр паралелограма.

63. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 6$ см, $\angle B = 120°$. Висота BK ділить сторону AD на два рівних відрізки. Знайдіть периметр паралелограма.

64. У паралелограмі $ABCD$ з вершини гострого кута A проведено висоти AL і AK. $\angle LAK = 140°$. Знайдіть кут C паралелограма.

65. У паралелограмі $ABCD$ з вершини тупого кута B проведено висоти BM і BN. $\angle MBN = 70°$. Знайдіть кут D паралелограма.

4 Високий рівень

66. Бісектриса кута B паралелограма $ABCD$ ділить сторону AD на два відрізки AK і KD так, що $AK - KD = 1$ см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 40 см.

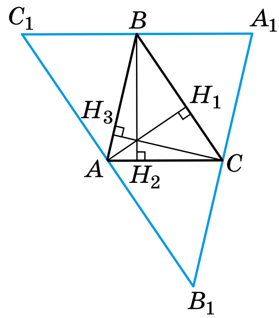
67. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на два відрізки BK і KC так, що $BK : KC = 3 : 7$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 78 см.

68. Два кути паралелограма відносяться як 5 : 7. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини:
1) тупого кута; 2) гострого кута.

69. Один з кутів паралелограма на 12° більший за другий. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини:
1) гострого кута; 2) тупого кута.

70. Доведіть, що три висоти трикутника або їх продовження перетинаються в одній точці (*ортоцентрі трикутника*).

Д о в е д е н н я. 1) Нехай AH_1, BH_2, CH_3 – висоти гострокутного трикутника ABC (мал. 35). Проведемо через вершини трикутника прямі, паралельні протилежним сторонам. Одержимо трикутник $A_1B_1C_1$. Чотирикутник ABA_1C – паралелограм (за побудовою). Тому $BA_1 = AC$. Аналогічно $ACBC_1$ – паралелограм і $C_1B = AC$. Отже, $C_1B = BA_1$, точка B – середина A_1C_1. Оскільки $BH_2 \perp AC$ і $AC \parallel A_1C_1$, то $BH_2 \perp A_1C_1$. Тому BH_2 належить серединному перпендикуляру до сторони A_1C_1 трикутника $A_1B_1C_1$. Аналогічно AH_1 і CH_3 належать серединним перпендикулярам до двох інших сторін цього трикутника. Як відомо, серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці. Отже, AH_1, BH_2 і CH_3 перетинаються в одній точці.



Мал. 35

2) Якщо $\triangle ABC$ – прямокутний, наприклад $\angle C = 90°$, то очевидно, що три висоти перетинаються в точці C.

3) Якщо $\triangle ABC$ – тупокутний, то продовження трьох висот трикутника перетинаються в одній точці. Доведення аналогічне до доведення у п. 1. ▲

Вправи для повторення

71. Знайдіть другий гострий кут прямокутного трикутника, якщо перший дорівнює: 1) 20°; 2) 65°.

72. Дві сторони трикутника дорівнюють 7,2 см і 2,5 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

73. Зовнішній кут трикутника у 2 рази більший за один з внутрішніх кутів, не суміжний з ним. Доведіть, що трикутник є рівнобедреним.

74. Чи можна побудувати чотирикутник зі сторонами 6 см, 6 см, 4 см і 2 см та кутом 60° між рівними сторонами?

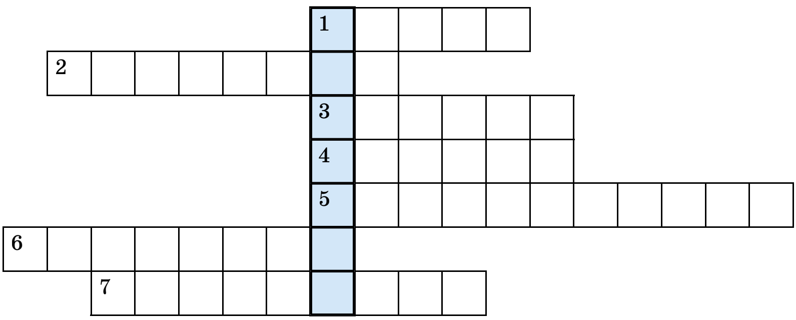
Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

75. Знайдіть периметр і площу прямокутника, сторони якого дорівнюють:

1) 5 см і 7 см; 2) 2 дм і 14 см.

Цікаві задачі для учнів неледачих

76. *Видатні українці.* Запишіть по горизонталях прізвища видатних українців (за потреби використайте додаткову літературу та Інтернет) і отримаєте у виділеному стовпчику ім'я давньогрецького філософа, математика, релігійного та політичного діяча.



1. Видатний український наукознавець у галузі зварювальних процесів, доктор технічних наук, Герой України.
2. Український політик, публіцист, літературний критик, провідник національно-демократичного визвольного руху кінця 1980–1990-х років, Герой України.
3. Український письменник, поет, публіцист, перекладач, учений, громадський і політичний діяч (1856–1916).
4. Видатний український лікар світового рівня, учений у галузях медицини, біокібернетики; його ім'ям названо Інститут серцево-судинної хірургії, який він очолював протягом двадцяти років.
5. Політичний діяч і публіцист, організатор української науки; Голова Центральної Ради Української Народної Республіки.
6. Видатний український поет, письменник, художник, громадський і політичний діяч, фольклорист, етнограф.
7. Український просвітитель-гуманіст, філософ, поет, педагог.

§ 3. ПРЯМОКУТНИК І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Прямокутником **називають паралелограм, у якого всі кути прямі** (мал. 36)**.**

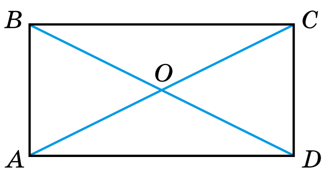
Оскільки прямокутник є паралелограмом, то він має всі *властивості паралелограма*.

1. У прямокутнику протилежні сторони рівні.
2. Периметр прямокутника $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.
3. Діагоналі прямокутника точкою перетину діляться навпіл.

Крім цього, прямокутник має ще *властивості*.

4. Діагоналі прямокутника рівні.

Мал. 36



Мал. 37

Д о в е д е н н я. Нехай дано прямокутник $ABCD$ (мал. 37). $\triangle ACD = \triangle DBA$ (за двома катетами). Тому $AC = BD$. ▲

5. Точка перетину діагоналей прямокутника рівновіддалена від усіх його вершин.

Оскільки $AC = BD$, а $AO = OC$, $BO = OD$ (мал. 37), то, очевидно, що $AO = BO = OC = OD$.

Задача 1. Діагональ ділить кут прямокутника у відношенні 2 : 3. Знайдіть кут між діагоналями даного прямокутника.

Р о з в' я з а н н я. 1) Нехай $\angle ADO : \angle ODC = 2 : 3$ (мал. 37). Позначимо $\angle ADO = 2x$, $\angle ODC = 3x$. Тоді $2x + 3x = 90°$, $x = 18°$. Тому $\angle ADO = 2 \cdot 18 = 36°$; $\angle ODC = 3 \cdot 18 = 54°$.

2) $\triangle OCD$ – рівнобедрений (бо $DO = OC$). Тому $\angle OCD = \angle ODC = 54°$. У $\triangle OCD$: $\angle COD = 180° - 2 \cdot 54° = 72°$. Отже, кут між діагоналями даного прямокутника дорівнює 72°.

В і д п о в і д ь. 72°.

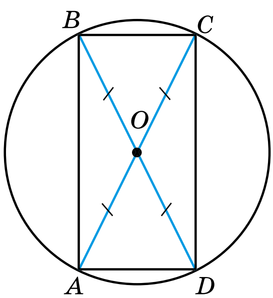
Розглянемо *ознаки прямокутника.*

Т е о р е м а (ознаки прямокутника). **Якщо у паралелограма: 1) усі кути рівні, або 2) один кут прямий, або 3) діагоналі рівні, – то паралелограм є прямокутником.**

Д о в е д е н н я. 1) Оскільки всі кути паралелограма рівні, а їх сума дорівнює $360°$, то кожний з них дорівнює $360° : 4 = 90°$. А тому паралелограм є прямокутником.

2) Нехай кут A паралелограма $ABCD$ прямий (мал. 36). Тоді $\angle C = \angle A = 90°$; $\angle B = \angle D = 180° - \angle A = 180° - 90° = 90°$. Отже, усі кути паралелограма прямі, а тому він є прямокутником.

3) Нехай у паралелограма $ABCD$ діагоналі AC і BD рівні (мал. 37). AD – спільна сторона трикутників ABD і DCA. Отже, $\triangle ABD = \triangle DCA$ (за трьома сторонами). Тому $\angle BAD = \angle CDA$. Але ж $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle BCD = \angle BAD$. У паралелограма всі кути рівні між собою. Тому він є прямокутником (за п. 1 цієї теореми). ▲



Мал. 38

Задача 2. У колі із центром O проведено діаметри AC і BD (мал. 38). Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Оскільки $AO = OC$, $BO = OD$ (як радіуси), то, за ознакою паралелограма, маємо, що $ABCD$ – паралелограм.

2) Оскільки $AC = BD$ (як діаметри), то, використовуючи ознаку прямокутника, маємо, що паралелограм $ABCD$ є прямокутником.

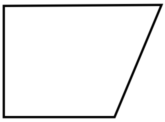
В і д п о в і д ь. Прямокутник.

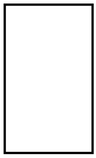
1. Яку фігуру називають прямокутником?
2. Сформулюйте і доведіть властивості прямокутника.
3. Сформулюйте і доведіть ознаки прямокутника.

1 Початковий рівень

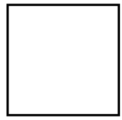
77. Які із чотирикутників, зображених на малюнках 39–43, є прямокутниками?

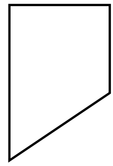
78. У прямокутнику $ABCD$ діагональ AC дорівнює 5 см. Яка довжина діагоналі BD?


Мал. 39


Мал. 40


Мал. 41


Мал. 42


Мал. 43

79. Сторони прямокутника дорівнюють 4 см і 7 см. Знайдіть його периметр.

80. Знайдіть периметр прямокутника, сторони якого дорівнюють 2 см і 5 см.

81. Якщо чотирикутник є прямокутником, то його діагоналі між собою рівні. Чи правильне обернене твердження? Наведіть приклад.

2 Середній рівень

82. Сторона BC прямокутника $ABCD$ дорівнює 8 см, а діагональ BD – 12 см. Знайдіть периметр трикутника BOC, де O – точка перетину діагоналей прямокутника.

83. O – точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. $AC = 12$ см, периметр трикутника AOB дорівнює 16 см. Знайдіть сторону AB.

84. (Усно.) Що можна сказати про вид паралелограма, коли відомо, що:

1) жоден з його кутів не є гострим;
2) жоден з його кутів не є тупим;
3) він має три рівних між собою кути?

85. Доведіть, що коли в чотирикутнику три кути прямі, то цей чотирикутник – прямокутник.

86. Доведіть, що коли в чотирикутнику всі кути рівні, то цей чотирикутник – прямокутник.

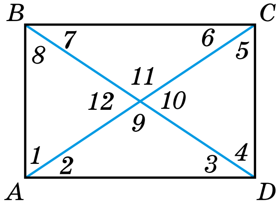
87. Периметр прямокутника дорівнює 40 см. Знайдіть його сторони, коли відомо, що:

1) одна з них на 2 см більша за другу;
2) сторони відносяться як 2 : 3.

88. Периметр прямокутника дорівнює 50 см. Знайдіть його сторони, коли відомо, що:

1) одна з них на 5 см менша від другої;
2) сторони відносяться як 4 : 1.

89. (Усно.) На малюнку 44 зображено прямокутник $ABCD$. Знайдіть усі рівні між собою кути.



Мал. 44

90. Знайдіть за малюнком 44:

1) $\angle 3$, якщо $\angle 8 = 52°$;

2) $\angle 2$, якщо $\angle 10 = 40°$.

91. Знайдіть за малюнком 44:

1) $\angle 5$, якщо $\angle 2 = 37°$;

2) $\angle 12$, якщо $\angle 3 = 30°$.

92. Діагональ прямокутника ділить кут прямокутника на два кути, один з яких на 20° більший за другий. Знайдіть ці кути.

3 Достатній рівень

93. Доведіть, що навколо прямокутника можна описати коло.

94. Знайдіть кут між меншою стороною і діагоналлю прямокутника, якщо він:

1) на 15° менший від кута між діагоналями, який лежить проти меншої сторони;

2) на 50° менший від кута між діагоналями, який лежить проти більшої сторони.

95. Знайдіть кут між більшою стороною і діагоналлю прямокутника, якщо він:

1) на 90° менший від кута між діагоналями, який лежить проти більшої сторони;

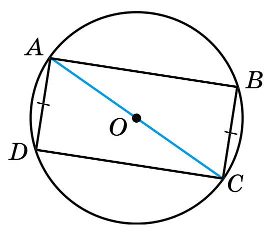
2) на 40° менший від кута між діагоналями, який лежить проти меншої сторони.

96. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, E – середина AB, $\angle CAB = 70°$. Знайдіть $\angle DOE$.

97. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. OP – бісектриса трикутника AOB, $\angle DOP = 130°$. Знайдіть $\angle CAB$.

98. У паралелограмі $ABCD$ з гострим кутом A діагоналі перетинаються в точці O. На відрізках AO і OC позначено точки M і N так, що $OM = OB$, $ON = OD$. Доведіть, що $BMDN$ – прямокутник.

99. Точки B і D належать колу із центром O, AC – діаметр кола, $AD = BC$ (мал. 45). Доведіть, що $ABCD$ – прямокутник.



Мал. 45

100. Перпендикуляри, проведені з точки перетину діагоналей прямокутника до двох його сусідніх сторін, дорівнюють 4 см і 9 см. Визначте периметр прямокутника.

101. Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить його сторону навпіл. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його більша сторона дорівнює 20 см.

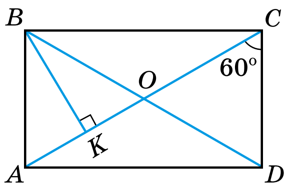
102. Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить його сторону навпіл. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його менша сторона дорівнює 8 дм.

4 Високий рівень

103. На малюнку 46 $ABCD$ – прямокутник, $BK \perp AC$, $\angle ACD = 60°$.

1) $OK = a$. Знайдіть: DB і AB;

2) $AC = m$. Знайдіть: AK і CD.



Мал. 46

104. На малюнку 46 $ABCD$ – прямокутник, $BK \perp AC$, $\angle ACD = 60°$, $AB = b$. Знайдіть BD і OK.

105. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою $BC = 35$ см вписано прямокутник $KLMN$ так, що точки K і L лежать на гіпотенузі трикутника, а точки M і N – на катетах. $KL : KN = 3 : 2$. Знайдіть периметр прямокутника.

106. У рівнобедрений прямокутний трикутник, катет якого дорівнює 20 см, вписано прямокутник, який має з трикутником спільний прямий кут, а вершина протилежного кута належить гіпотенузі. Знайдіть периметр прямокутника.

Вправи для повторення

2 **107.** З вершини тупого кута B паралелограма $ABCD$ проведено висоту BK. Знайдіть кути паралелограма, якщо $BK = \frac{1}{2}AB$.

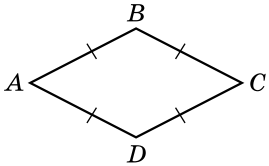
3 **108.** 1) Градусна міра одного з кутів трикутника є середнім арифметичним двох інших кутів. Знайдіть цей кут.

2) Градусна міра одного з кутів чотирикутника є середнім арифметичним трьох інших кутів. Знайдіть цей кут.

4 **109.** Через точку P, що належить внутрішній області кута ABC, проведіть пряму так, щоб її відрізок, який лежить між сторонами кута, ділився точкою P навпіл.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

110. Дано: $AB = BC = CD = DA$ (мал. 47).
Довести: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.



Мал. 47

Цікаві задачі для учнів неледачих

111. Чи можна розрізати квадрат розміром 6×6 на прямокутники розміром 1×4?

§ 4. РОМБ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

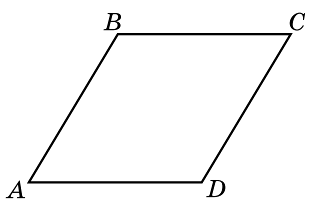
Ромбом **називають паралелограм, у якого всі сторони рівні** (мал. 48)**.**

Оскільки ромб є паралелограмом, то він має всі *властивості паралелограма*.

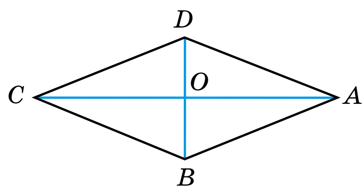
1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів ромба дорівнює 180°.
2. У ромба протилежні кути рівні.
3. Діагоналі ромба точкою перетину діляться навпіл.
4. Периметр ромба $P_{ABCD} = 4AB$.

Крім того, ромб має ще таку *властивість*.

5. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і ділять його кути навпіл.



Мал. 48



Мал. 49

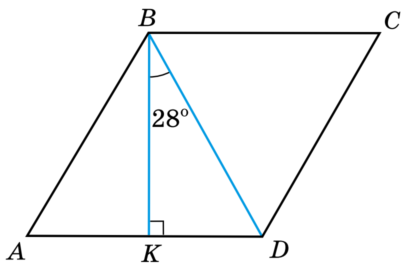
Д о в е д е н н я. Нехай AC і BD – діагоналі ромба $ABCD$ (мал. 49), O – точка перетину діагоналей. Оскільки $AB = AD$ і $DO = OB$, то AO – медіана рівнобедреного трикутника ABD, проведена до основи BD. Тому AO є також висотою і бісектрисою трикутника ABD.

Отже, $AC \perp BD$ і $\angle DAO = \angle BAO$. ▲

Аналогічно можна довести, що діагональ AC ділить навпіл кут DCB, а діагональ BD ділить навпіл кути ABC і ADC.

Задача 1. Кут між висотою і діагоналлю ромба, проведеними з однієї вершини, дорівнює 28°. Знайдіть кути ромба.

Р о з в' я з а н н я. BD – діагональ ромба $ABCD$, а BK – його висота (мал. 50), $\angle KBD = 28°$ (за умовою).



Мал. 50

1) У $\triangle BKD$ $\angle BDK = 90° - 28° = 62°$.

2) Оскільки DB ділить кут $\angle ADC$ навпіл, то $\angle ADC = 2 \cdot 62° = 124°$.

3) Тоді $\angle ABC = \angle ADC = 124°$; $\angle A = \angle C = 180° - 124° = 56°$.

В і д п о в і д ь. 124°, 56°, 124°, 56°.

Розглянемо *ознаки ромба*.

Т е о р е м а (ознаки ромба). **Якщо в паралелограмі: 1) дві сусідні сторони рівні, або 2) діагоналі перетинаються під прямим кутом, або 3) діагональ ділить навпіл кути паралелограма, – то паралелограм є ромбом.**

Д о в е д е н н я. 1) Нехай $ABCD$ – паралелограм (див. мал. 49). Оскільки $AB = AD$ (за умовою) і $AB = CD$, $AD = BC$ (за властивістю паралелограма), то $AB = AD = BC = CD$. Отже, $ABCD$ – ромб.

2) Нехай $AC \perp BD$ (мал. 49). Оскільки $OB = OD$ (за властивістю паралелограма), то $\triangle AOB = \triangle AOD$ (за двома катетами). Тому $AB = AD$. За п. 1 цієї теореми $ABCD$ – ромб.

3) Діагональ DB ділить навпіл кут D паралелограма $ABCD$, тобто $\angle ADB = \angle BDC$ (за умовою). Оскільки паралельні прямі AB і DC перетнули січною DB, то $\angle ABD = \angle BDC$ (як внутрішні різносторонні). Отже, $\angle ADB = \angle ABD$. Тому за ознакою рівнобедреного трикутника $\triangle ABD$ – рівнобедрений і $AD = AB$. За п. 1 цієї теореми $ABCD$ – ромб. ▲

Задача 2. Доведіть, що коли в чотирикутнику всі сторони рівні, то цей чотирикутник – ромб.

Д о в е д е н н я. Нехай $AB = BC = CD = DA$ (див. мал. 48).

1) Оскільки в чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно рівні, то за ознакою паралелограма маємо, що $ABCD$ – паралелограм.

2) У паралелограма $ABCD$ сусідні сторони рівні. Тому $ABCD$ – ромб (за ознакою ромба). ▲

А ще раніше...

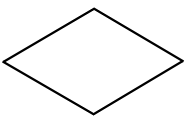
Слово «ромб» грецького походження, у давнину воно означало тіло, що обертається, – веретено, дзиґу. Ромб тоді пов'язували з перерізом веретена, на яке намотано нитки.

У «Началах» Евкліда термін «ромб» зустрічається лише один раз, а властивості ромба Евклід взагалі не розглянув.

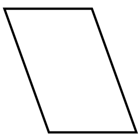
1. Яку фігуру називають ромбом?
2. Сформулюйте і доведіть властивості ромба.
3. Сформулюйте і доведіть ознаки ромба.

1 Початковий рівень

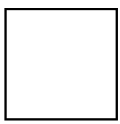
112. (Усно.) Які із чотирикутників на малюнках 51–55 є ромбами?



Мал. 51

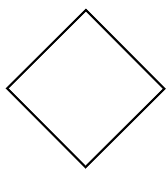


Мал. 52



Мал. 53

Мал. 54



Мал. 55

113. Накресліть ромб $ABCD$, у якого кут B тупий.

114. Накресліть ромб $ABCD$, у якого кут A гострий.

115. Периметр ромба дорівнює 28 см. Знайдіть його сторону.

116. Сторона ромба дорівнює 5 дм. Знайдіть його периметр.

117. Гострий кут ромба дорівнює 50°. Який кут утворює діагональ, проведена із цього кута, зі стороною ромба?

118. Тупий кут ромба дорівнює 110°. Який кут утворює діагональ, проведена із цього кута, зі стороною ромба?

119. Діагональ ромба утворює зі стороною кут 60°. Знайдіть тупий кут ромба.

120. Діагональ ромба утворює зі стороною кут 20°. Знайдіть гострий кут ромба.

2 Середній рівень

121. У ромбі $ABCD$ кут A дорівнює 36°. Знайдіть кути трикутника AOB, де O – точка перетину діагоналей.

122. O – точка перетину діагоналей ромба $ABCD$, $\angle B = 118°$. Знайдіть кути трикутника BOC.

123. Сума довжин трьох сторін ромба дорівнює 15 см. Знайдіть його периметр.

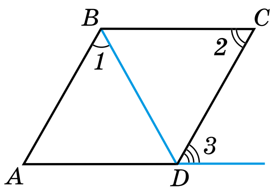
124. Сума довжин двох сторін ромба дорівнює 18 см. Знайдіть периметр ромба.

125. $ABCD$ – ромб, $\angle 2 = 66°$ (мал. 56). Знайдіть $\angle 1$.

126. $ABCD$ – ромб, $\angle 1 = 58°$ (мал. 56). Знайдіть $\angle 2$.

127. $ABCD$ – ромб, $\angle 1 = 55°$ (мал. 56). Знайдіть $\angle 3$.

128. $ABCD$ – ромб, $\angle 3 = 50°$ (мал. 56). Знайдіть $\angle 1$.



Мал. 56

129. У ромбі $ABCD$ $AB = BD$. Знайдіть кути ромба.

130. (Усно.) Які спільні властивості мають ромб і паралелограм?

131. Знайдіть кути ромба, якщо:

1) сума двох його кутів дорівнює 80°;

2) один з них на 20° більший за другий.

132. Знайдіть кути ромба, якщо:

1) сума двох його кутів дорівнює 210°;

2) один з них на 50° менший від другого.

133. (Усно.) Чи правильне твердження:

1) якщо в чотирикутнику діагоналі перпендикулярні, то він є ромбом;

2) якщо в чотирикутнику діагоналі не перпендикулярні, то він не може бути ромбом;

3) існує ромб, який є прямокутником;

4) жоден прямокутник не є ромбом?

3 Достатній рівень

134. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює $10°$.

135. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, які відносяться як $2 : 3$.

136. Побудуйте ромб:
1) за стороною і діагоналлю;
2) за діагоналями.

137. Побудуйте ромб за стороною і кутом.

138. У ромбі $ABCD$ з вершини тупого кута B проведено висоти BM і BN. Доведіть, що $BM = BN$.

139. У ромбі $ABCD$ з вершин тупих кутів проведено висоти BK і DL. Доведіть, що $BK = DL$.

140. Висоти, проведені з вершини гострого кута ромба, утворюють між собою кут $110°$. Знайдіть кути ромба.

141. Висоти, проведені з вершини тупого кута ромба, утворюють між собою кут $50°$. Знайдіть кути ромба.

4 Високий рівень

142. Діагональ ромба, проведена з вершини тупого кута, утворює з висотою, проведеною із цієї самої вершини, кут $30°$. Менша діагональ ромба дорівнює a см. Знайдіть:
1) кути ромба; 2) периметр ромба.

143. У ромбі висота, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону ромба навпіл. Знайдіть:
1) кути ромба;
2) периметр ромба, якщо його менша діагональ дорівнює b см.

144. На діагоналі AC ромба $ABCD$ позначено точки M і N такі, що $AM = CN$. Доведіть, що чотирикутник $DMBN$ є ромбом (розгляньте два випадки розміщення точок M і N).

145. Доведіть, що середини сторін прямокутника є вершинами ромба.

146. У рівносторонній трикутник ABC вписано ромб $AMNK$ так, що трикутник і ромб мають спільний кут A, а точка N лежить на стороні BC. Знайдіть периметр трикутника, якщо периметр ромба дорівнює 40 см.

Вправи для повторення

147. Сторони паралелограма відносяться як 5 : 2. Знайдіть периметр паралелограма, якщо різниця цих сторін дорівнює 15 см.

148. Один з кутів трикутника дорівнює сумі двох інших. Знайдіть найбільшу сторону цього трикутника, якщо медіана, проведена до неї, дорівнює 5 см.

149. Периметр трикутника дорівнює $2p$ см. Чи може одна з його сторін дорівнювати:
1) $(p - 1)$ см; 2) p см; 3) $(p + 1)$ см?

150. У чотирикутнику $ABCD$ бісектриса кута A перетинає бісектриси кутів B і D під прямим кутом. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

151. Знайдіть периметр і площу квадрата, сторона якого дорівнює: 1) 5 см; 2) 2,1 дм; 3) $\frac{3}{4}$ м; 4) $1\frac{1}{2}$ дм.

Цікаві задачі для учнів неледачих

152. (*Київська міська олімпіада, 1987 р.*) Вписане у трикутник ABC коло дотикається до сторони BC у точці K. Доведіть, що відрізок AK довший за діаметр кола.

§ 5. КВАДРАТ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

***Квадратом* називають прямокутник, у якого всі сторони рівні.**

На мал. 57 зображено квадрат $ABCD$. Прямокутник є паралелограмом, тому і квадрат – паралелограм, у якого всі сторони рівні, тобто він є і ромбом. Отже, квадрат має властивості прямокутника і ромба.

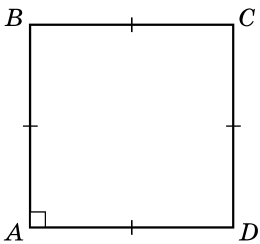
Сформулюємо *властивості квадрата*.

1. Усі кути квадрата прямі.
2. Периметр квадрата $P_{ABCD} = 4AB$.
3. Діагоналі квадрата між собою рівні (мал. 58).

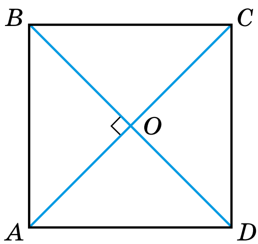
4. Діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні і точкою перетину діляться навпіл (мал. 58)**.**

5. Діагоналі квадрата ділять його кути навпіл, тобто утворюють кути 45° зі сторонами квадрата (мал. 58)**.**

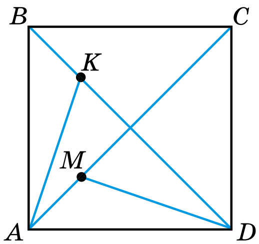
6. Точка перетину діагоналей квадрата рівновіддалена від усіх його вершин: *AO* = *BO* = *CO* = *DO*.



Мал. 57



Мал. 58



Мал. 59

Задача 1. Точки K і M належать відповідно діагоналям BD і AC квадрата $ABCD$, причому $AM = \frac{1}{4}AC$, $BK = \frac{1}{4}BD$. Доведіть, що $\triangle ADM = \triangle BAK$ (мал. 59).

Д о в е д е н н я. 1) $\angle MAD = \angle ABK = 45°$, $AD = AB$ (як сторони квадрата).

2) Оскільки $AC = BD$ (як діагоналі квадрата) і $AM = \frac{1}{4}AC$, $BK = \frac{1}{4}BD$, то $AM = BK$.

3) Тому $\triangle ADM = \triangle BAK$ (за двома сторонами і кутом між ними). ▲

Розглянемо *ознаки квадрата*.

Т е о р е м а (ознаки квадрата). **1) Якщо діагоналі прямокутника взаємно перпендикулярні, то він є квадратом. 2) Якщо діагоналі ромба між собою рівні, то він є квадратом.**

Д о в е д е н н я. 1) Прямокутник є паралелограмом, а паралелограм із взаємно перпендикулярними діагоналями є ромбом. Отже, у заданого прямокутника всі сторони рівні, а тому він є квадратом.

2) Ромб є паралелограмом, а паралелограм з рівними діагоналями є прямокутником. Отже, у розглядуваного ромба всі кути прямі, а тому він є квадратом. ▲

Задача 2. Доведіть, що коли в чотирикутнику всі сторони рівні і всі кути рівні, то цей чотирикутник – квадрат.

Д о в е д е н н я. 1) Оскільки в чотирикутнику всі кути рівні, то, за ознакою прямокутника, він є прямокутником.

2) Оскільки у прямокутника всі сторони рівні, то він є квадратом. ▲

А ще раніше...

Термін «квадрат» походить від латинського *quadratum* (*quadrate* – зробити чотирикутним).

Відомий історик математики Д. Д. Мордухай-Болтовський (1876–1952) писав: «Першим чотирикутником, з яким познайомилася геометрія, був квадрат».

1. Яку фігуру називають квадратом?
2. Сформулюйте властивості квадрата.
3. Сформулюйте і доведіть ознаки квадрата.

1 Початковий рівень

153. Периметр квадрата дорівнює 20 см. Знайдіть його сторону.

154. Сторона квадрата дорівнює 7 дм. Знайдіть його периметр.

155. (Усно.) На мал. 58 зображено квадрат $ABCD$. Назвіть рівні між собою відрізки на цьому малюнку.

156. Якщо чотирикутник є квадратом, то його діагоналі рівні і взаємно перпендикулярні. Чи правильне обернене твердження? Наведіть приклад.

2 Середній рівень

157. Точка перетину діагоналей квадрата знаходиться на відстані 2 см від однієї з його вершин. Знайдіть суму довжин діагоналей цього квадрата.

158. Сума довжин діагоналей квадрата дорівнює 32 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до однієї з його вершин.

159. Сума довжин двох сторін квадрата дорівнює 10 см. Знайдіть периметр квадрата.

160. Сума довжин трьох сторін квадрата дорівнює 18 дм. Знайдіть периметр квадрата.

161. (Усно.) Які спільні властивості мають квадрат і ромб?

162. (Усно.) Які спільні властивості мають квадрат і прямокутник?

163. Різниця між периметром квадрата і його стороною дорівнює 18 см. Знайдіть сторону квадрата та його периметр.

164. Сусідні сторони прямокутника рівні. Доведіть, що він є квадратом.

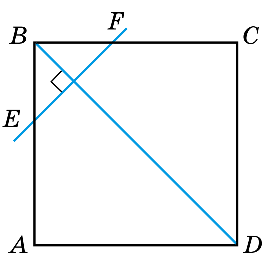
165. Один з кутів ромба – прямий. Доведіть, що цей ромб є квадратом.

166. (Усно.) Чи правильне твердження:

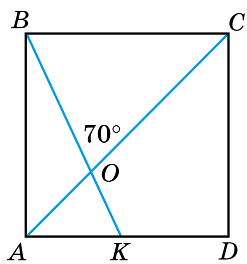
1) кожний квадрат є прямокутником;
2) існує квадрат, який не є ромбом;
3) кожний ромб є квадратом;
4) кожний квадрат є ромбом;
5) будь-який прямокутник є квадратом;
6) відношення периметра квадрата до його сторони є сталим для всіх квадратів?

167. $ABCD$ – квадрат, $EF \perp BD$ (мал. 60). Знайдіть $\angle BFE$.

168. $ABCD$ – квадрат, $\angle BOC = 70°$ (мал. 61). Знайдіть $\angle OKA$.



Мал. 60



Мал. 61

3 Достатній рівень

169. Побудуйте квадрат:

1) за його периметром;
2) за його діагоналлю.

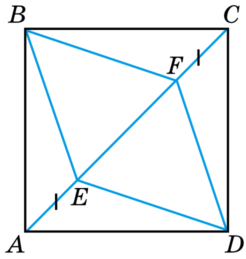
170. Побудуйте квадрат за сумою його діагоналей.

171. Точка перетину діагоналей квадрата віддалена від його сторони на 3 см. Знайдіть периметр квадрата.

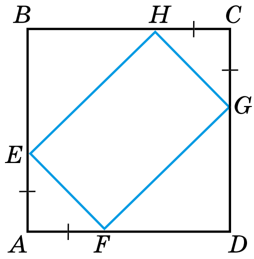
172. Периметр квадрата дорівнює 32 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до його сторін.

173. $ABCD$ – квадрат, $AE = FC$ (мал. 62). Доведіть, що $BEDF$ – ромб.

174. $ABCD$ – квадрат, $AE = AF = CG = CH$ (мал. 63). Доведіть, що $EFGH$ – прямокутник.



Мал. 62



Мал. 63

175. До кола із центром у точці O з точки A проведено дві взаємно перпендикулярні дотичні AB і AC, B і C – точки дотику. Доведіть, що $ABOC$ – квадрат.

4 Високий рівень

176. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) вписано квадрат $CMNK$ так, що прямий кут у них спільний, а точка N належить стороні AB. Катет трикутника дорівнює b см. Знайдіть периметр квадрата.

177. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) вписано квадрат $KMNL$ так, що точки K і M лежать на гіпотенузі трикутника, а точки L і N – на катетах AC і BC відповідно. Периметр квадрата дорівнює 12 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

178. На сторонах квадрата зовні побудовано рівносторонні трикутники. Доведіть, що вершини трикутників, які не є вершинами заданого квадрата, є вершинами іншого квадрата.

Вправи для повторення

2 **179.** У ромбі $ABCD$ діагональ утворює з однією зі сторін кут 30°. Знайдіть кути ромба.

3 **180.** У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 1 : 3 : 4 : 10$. Знайдіть кути чотирикутника. Опуклим чи неопуклим є цей чотирикутник?

181. Бісектриса кута B прямокутника $ABCD$ ділить сторону AD на відрізки AK і KD так, що $AK : KD = 3 : 5$. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 110 см.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

182. 1) Накресліть чотирикутник, дві сторони якого між собою паралельні, а дві інші – непаралельні.

2) Яка найбільша кількість гострих кутів може бути в такому чотирикутнику?

Цікаві задачі для учнів неледачих

183. О 12-й годині годинна і хвилинна стрілки збігаються. Через яку найменшу кількість хвилин стрілки знову збіжаться?

Домашня самостійна робота № 1

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. Укажіть відрізок, що є діагоналлю чотирикутника $ABCD$.

А. AB; **Б.** BD; **В.** BC; **Г.** AD.

2. Знайдіть тупий кут паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 35°.

А. 125°; **Б.** 135°; **В.** 145°; **Г.** 155°.

3. Знайдіть сторону квадрата, якщо його периметр дорівнює 36 см.

А. 4 см; **Б.** 6 см; **В.** 9 см; **Г.** 12 см.

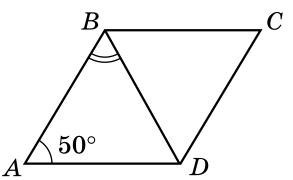
4. Периметр прямокутника дорівнює 24 см, а одна з його сторін на 2 см більша за другу. Знайдіть довжину меншої сторони прямокутника.

А. 5 см; **Б.** 6 см; **В.** 7 см; **Г.** 8 см.

5. $ABCD$ – ромб; $\angle A = 50°$ (мал. 64). Знайдіть $\angle ABD$.

А. 55°; **В.** 75°;

Б. 50°; **Г.** 65°.



Мал. 64

6. Укажіть правильне твердження:

А. якщо діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні, то він є ромбом;

Б. відношення периметра ромба до його сторони є сталим для всіх ромбів;

В. якщо діагоналі чотирикутника рівні, то він є прямокутником;

Г. відношення периметра прямокутника, який не є квадратом, до його найбільшої сторони є незмінним для всіх прямокутників.

7. Знайдіть найбільший кут чотирикутника, у якого градусні міри кутів пропорційні числам 2; 3; 5 і 8.

А. 120°; **Б.** 130°; **В.** 150°; **Г.** 160°.

8. Висоти, які проведено з вершини тупого кута паралелограма, утворюють між собою кут 30°. Знайдіть тупий кут паралелограма.

А. 120°; **Б.** 130°; **В.** 150°; **Г.** 160°.

9. Знайдіть гострий кут ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює 40°.

А. 25°; **Б.** 30°; **В.** 50°; **Г.** 60°.

10. Бісектриса кута D паралелограма $ABCD$ ділить сторону AB на відрізки AK і KB так, що $AK : KB = 1 : 3$. Знайдіть AB, якщо периметр паралелограма дорівнює 60 см.

А. 26 см; **Б.** 24 см; **В.** 20 см; **Г.** 15 см.

11. З вершини тупого кута A ромба $ABCD$ проведено висоту AK. $\angle CAK = 30°$, $AC = 6$ см. Знайдіть периметр ромба.

А. 18 см; **Б.** 24 см; **В.** 30 см; **Г.** 36 см.

12. У $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$, $AC = BC$) вписано квадрат $KLMN$ так, що $K \in AB$; $L \in AB$; $M \in CB$; $N \in AC$. Знайдіть периметр квадрата, якщо $AB = 12$ см.

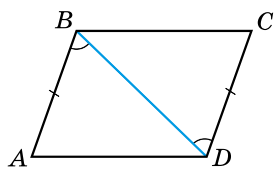
А. 24 см; **Б.** 20 см; **В.** 12 см; **Г.** 16 см.

Завдання для перевірки знань до § 1–5

1. Накресліть чотирикутник $MNPL$ і проведіть у ньому діагоналі.

2. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них дорівнює 80°.

3. Знайдіть периметр квадрата, якщо його сторона дорівнює 7 см.



Мал. 65

4. Периметр прямокутника дорівнює 18 см. Знайдіть його сторони, якщо одна з них на 1 см більша за другу.

5. $ABCD$ – ромб. $\angle ABD = 50°$. Знайдіть кути ромба.

6. На малюнку 65 $\angle ABD = \angle BDC$, $AB = DC$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.

7. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3, 4, 6. Опуклим чи неопуклим він є?

8. Висоти, проведені з вершини гострого кута ромба, утворюють між собою кут 120°. Знайдіть кути ромба.

9. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на відрізки BK і KC так, що $BK : KC = 4 : 3$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 88 см.

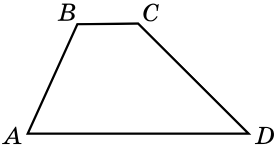
Додаткові завдання

10. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою $BC = 23$ см вписано прямокутник $KLMN$ так, що точки K і L належать гіпотенузі трикутника, а точки M і N – катетам. Сторона KL прямокутника на 2 см більша за сторону LM. Знайдіть периметр прямокутника.

11. З вершини тупого кута B ромба $ABCD$ проведено висоту BM, $\angle DBM = 30^\circ$. Периметр ромба дорівнює 40 см. Знайдіть меншу діагональ ромба.

§ 6. ТРАПЕЦІЯ

Трапецією **називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.**



Мал. 66

На малюнку 66 зображено трапецію $ABCD$. Паралельні сторони трапеції називають ***основами***, а не паралельні – ***бічними сторонами***. На малюнку 66 AD і BC – основи трапеції, AB і CD – її бічні сторони.

Розглянемо деякі *властивості трапеції.*

1. Сума кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°.

Оскільки $AD \parallel BC$, то $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (як сума внутрішніх односторонніх кутів). Аналогічно $\angle C + \angle D = 180^\circ$.

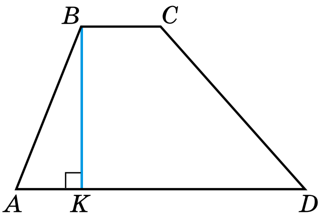
2. Трапеція є опуклим чотирикутником.

Оскільки $\angle A + \angle B = 180^\circ$, то $\angle A < 180^\circ$, $\angle B < 180^\circ$. Аналогічно $\angle C < 180^\circ$, $\angle D < 180^\circ$. Отже, трапеція – опуклий чотирикутник.

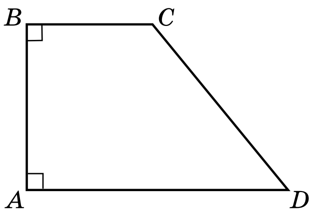
Висотою трапеції **називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки основи трапеції до прямої, що містить протилежну основу.**

Найчастіше висоту трапеції проводять з її вершини. На малюнку 67 BK – висота трапеції $ABCD$.

Трапецію називають ***прямокутною***, якщо один з її кутів – прямий. На малюнку 68 – прямокутна трапеція $ABCD$ ($\angle A = 90°$). Очевидно, що $\angle B = 90°$. AB є меншою бічною стороною прямокутної трапеції і її висотою.



Мал. 67



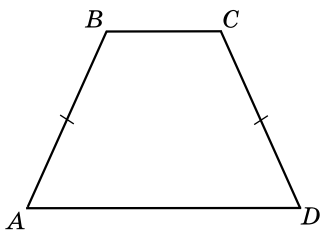
Мал. 68

Трапецію називають ***рівнобічною***, якщо її бічні сторони рівні. На малюнку 69 – рівнобічна трапеція $ABCD$.

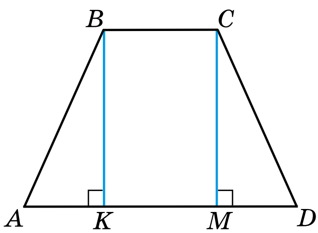
Розглянемо деякі важливі *властивості рівнобічної трапеції*.

1. У рівнобічній трапеції кути при основі між собою рівні.

Д о в е д е н н я. 1) Нехай в трапеції $ABCD$ $AB = CD$. Проведемо висоти трапеції BK і CM з вершин її тупих кутів B і C (мал. 70). Утворився прямокутник $BKMC$. Тому $BK = CM$.



Мал. 69

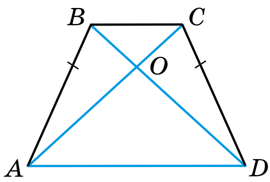


Мал. 70

2) $\triangle ABK = \triangle DCM$ (за катетом і гіпотенузою). Тому $\angle BAD = \angle CDA$.

3) Також $\angle ABK = \angle DCM$. Оскільки $\angle KBC = \angle MCB = 90°$, то $\angle ABC = \angle ABK + 90°$ і $\angle DCB = \angle DCM + 90°$. Тому $\angle ABC = \angle DCB$. ▲

2. Діагоналі рівнобічної трапеції рівні.



Мал. 71

Д о в е д е н н я. Розглянемо малюнок 71. $\angle BAD = \angle CDA$ (як кути при основі рівнобічної трапеції), $AB = DC$, AD – спільна сторона трикутників ABD і DCA. Тому $\triangle ABD = \triangle DCA$ (за двома сторонами і кутом між ними). Отже, $AC = BD$.

Задача. O – точка перетину діагоналей рівнобічної трапеції $ABCD$ з основами AD і BC (мал. 71). Доведіть, що $AO = OD$, $BO = OC$.

Д о в е д е н н я. $\triangle ABD = \triangle DCA$ (доведено вище). Тому $\angle ODA = \angle OAD$. За ознакою рівнобедреного трикутника – трикутник AOD – рівнобедрений. Тому $AO = OD$. Оскільки $AC = BD$ і $AO = OD$, то $OC = BO$ (бо $OC = AC - AO$, $BO = BD - OD$). ▲

Т е о р е м а (ознака рівнобічної трапеції). **Якщо у трапеції кути при одній основі рівні, то трапеція – рівнобічна.**

Д о в е д е н н я. 1) Нехай у трапеції $ABCD$ кути при більшій основі AD рівні (мал. 70), тобто $\angle BAD = \angle CDA$. Проведемо висоти BK і CM, які рівні між собою.

2) Тоді $\triangle BAK = \triangle CDM$ (за катетом і протилежним кутом). Тому $AB = DC$. Трапеція рівнобічна, що й треба було довести. ▲

А ще раніше...

Термін «трапеція» грецького походження (грецькою мовою «трапедзіон» означає «столик», зокрема столик для обіду; слова «трапеція» і «трапеза» – однокореневі).

У своїй праці «Начала» Евклід під терміном «трапеція» розумів будь-який чотирикутник, який не є паралелограмом. Більшість математиків Середньовіччя використовувала термін «трапеція» з тим самим змістом.

Трапеція в сучасному розумінні вперше зустрічається у давньогрецького математика Посидонія (I ст.), але лише починаючи з XVIII ст. цей термін став загальновживаним для чотирикутників, у яких дві сторони паралельні, а дві інші – непаралельні.

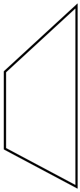
1. Яку фігуру називають трапецією?
2. Що називають основами трапеції, бічними сторонами трапеції?
3. Сформулюйте властивості трапеції.
4. Що таке висота трапеції?

5. Яку трапецію називають прямокутною, яку – рівнобічною?
6. Сформулюйте і доведіть властивості рівнобічної трапеції.
7. Сформулюйте і доведіть ознаку рівнобічної трапеції.

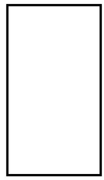
1 Початковий рівень

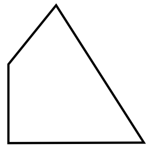
184. На яких з малюнків 72–76 зображено трапецію?


Мал. 72


Мал. 73


Мал. 74


Мал. 75


Мал. 76

185. Накресліть трапецію $PKML$ ($PK \parallel ML$). Укажіть основи трапеції, бічні сторони трапеції.

186. Накресліть трапецію $DMFK$ ($DM \parallel FK$). Укажіть основи трапеції, бічні сторони трапеції.

187. Накресліть прямокутну трапецію $ABCD$ ($\angle A = \angle B = 90°$).

188. Накресліть рівнобічну трапецію $ABCD$ ($AB = CD$).

189. Два кути трапеції дорівнюють 20° і 100°. Знайдіть два інших її кути.

190. Два кути трапеції дорівнюють 110° і 40°. Знайдіть два інших її кути.

2 Середній рівень

191. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 10 см, а периметр 28 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

192. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 7 см і 5 см, а бічна сторона – 3 см. Знайдіть периметр трапеції.

193. Чи існує трапеція, у якої два протилежних кути:

1) гострі; 2) прямі; 3) тупі?

У разі позитивної відповіді накресліть таку трапецію.

194. Чи існує трапеція, у якої:

1) основи між собою рівні;

2) три сторони між собою рівні?

У разі позитивної відповіді накресліть таку трапецію.

195. Чи існує трапеція, у якої:

1) три кути прямі; 2) два протилежних кути рівні?

У разі позитивної відповіді накресліть таку трапецію.

196. Сторони AD і BC – основи трапеції $ABCD$. Доведіть, що $\angle CAD = \angle ACB$.

197. Чи можуть кути трапеції, узяті в послідовному порядку, відноситись як:

1) 2 : 3 : 4 : 1; 2) 2 : 3 : 5 : 2?

198. Чи можуть кути трапеції, узяті в послідовному порядку, відноситись як:

1) 3 : 1 : 2 : 2; 2) 3 : 1 : 2 : 4?

199. У трапеції, яка не є рівнобічною, два кути дорівнюють 40° і 140°. Чи можна знайти два її інших кути?

200. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини гострого кута, утворює з бічною стороною кут 38°. Знайдіть кути трапеції.

201. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини тупого кута, утворює з бічною стороною кут 56°. Знайдіть кути трапеції.

202. У трапеції $ABCD$ AB – більша основа. Прямі BC і AD перетинаються в точці E. $\angle ECD = 40°$, $\angle BEA = 70°$. Знайдіть кути трапеції.

203. У трапеції $ABCD$ BC – менша основа. На відрізку AD взято точку E так, що $BE \parallel CD$; $\angle ABE = 60°$, $\angle BEA = 40°$. Знайдіть кути трапеції.

204. У прямокутній трапеції гострий кут удвічі менший від тупого. Знайдіть кути трапеції.

205. У прямокутній трапеції тупий кут на 40° більший за гострий. Знайдіть кути трапеції.

206. У рівнобічній трапеції бічна сторона вдвічі більша за висоту. Знайдіть кути трапеції.

3 Достатній рівень

207. У трапеції $ABCD$ $\angle A + \angle C = 180°$. Визначте вид трапеції.

208. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює 60°. Більша бічна сторона і більша основа дорівнюють по 16 см. Знайдіть меншу основу.

209. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює 45°. Менша бічна сторона і менша основа дорівнюють по 18 см. Знайдіть більшу основу.

210. У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює більшій основі і утворює з нею кут 40°. Знайдіть кути трапеції.

211. У рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює меншій основі, а діагональ утворює із цією основою кут 20°. Знайдіть кути трапеції.

212. Діагональ AC трапеції $ABCD$ ділить кут A навпіл. Доведіть, що бічна сторона AB дорівнює основі BC.

213. O – точка перетину бісектрис кутів A і B трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Доведіть, що $\angle AOB = 90°$.

214. BK і CM – висоти рівнобічної трапеції $ABCD$, проведені з вершин її тупих кутів, $AD = a$, $BC = b$. Доведіть, що $AK = MD = \frac{a-b}{2}$; $AM = KD = \frac{a+b}{2}$.

215. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу трапеції на відрізки 2 см і 7 см. Знайдіть основи трапеції.

4 Високий рівень

216. (*Ознака рівнобічної трапеції*). Якщо у трапеції діагоналі між собою рівні, то вона – рівнобічна. Доведіть.

217. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює бічній стороні, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть кути трапеції.

218. У рівнобічній трапеції $ABCD$ AD – більша основа. $AD = CD$, $\angle BAC = 18°$. Знайдіть кути трапеції.

219. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b, а її діагоналі взаємно перпендикулярні. Доведіть, що висота трапеції дорівнює $\frac{a+b}{2}$.

220. У прямокутній трапеції гострий кут і кут, який утворює менша діагональ з меншою основою, дорівнюють 60°. Знайдіть відношення основ трапеції.

221. У прямокутній трапеції діагональ перпендикулярна до бічної сторони, а тупий кут утричі більший за гострий. Знайдіть відношення основ.

222. Побудуйте трапецію за основами a і b ($a > b$) та бічними сторонами c і d.

Вправи для повторення

223. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює $75°$. Знайдіть зовнішній кут при вершині кута між бічними сторонами.

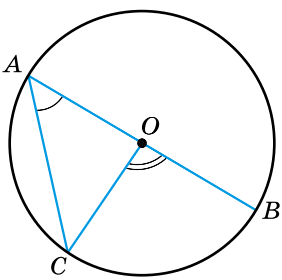
224. Тупий кут ромба дорівнює $120°$, а його менша діагональ – 5 см. Знайдіть периметр ромба.

225. Доведіть, що паралелограм, у якого всі висоти рівні, є ромбом.

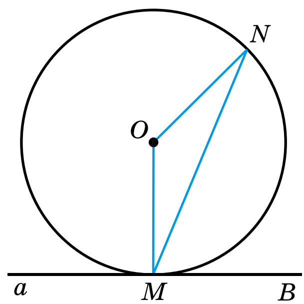
Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

226. Накресліть коло, радіус якого 3 см. Проведіть у цьому колі діаметр і хорду.

227. Точка O – центр кола (мал. 77). Знайдіть:
1) $\angle COB$, якщо $\angle CAO = 50°$;
2) $\angle CAO$, якщо $\angle COB = 110°$.



Мал. 77



Мал. 78

228. Точка O – центр кола, а точка M – точка дотику прямої a з колом (мал. 78). Знайдіть:
1) $\angle NMB$, якщо $\angle MON = 140°$;
2) $\angle MON$, якщо $\angle BMN = 65°$.

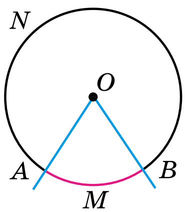
Цікаві задачі для учнів неледачих

229. Чотири магазини деякого підприємця розташовано у вершинах опуклого чотирикутника. Де йому слід розмістити товарний склад, щоб сума відстаней від складу до всіх магазинів була найменшою?

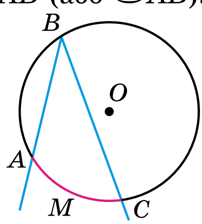
§ 7. ВПИСАНІ ТА ЦЕНТРАЛЬНІ КУТИ

Центральним кутом **називають кут з вершиною в центрі кола.**

На малюнку 79 $\angle AOB$ – центральний кут, сторони якого перетинають коло в точках A і B. Точки A і B розбивають коло на дві дуги. Частину кола, яка лежить усередині кута, називають *дугою кола*, що відповідає цьому центральному куту. Якщо центральний кут менший від розгорнутого, то дуга, що йому відповідає, є меншою за півколо (її виділено кольором на малюнку 79). Якщо центральний кут більший за розгорнутий, то дуга, що йому відповідає, є більшою за півколо. Розгорнутому куту відповідає дуга, що є півколом. Дугу позначають символом $\smile$, який записують перед назвою дуги або над нею. Щоб уточнити, про яку саме з двох дуг, на які центральний кут поділив коло, йдеться, на кожній з них позначають довільну точку, відмінну від кінців дуги. Наприклад, M і N (мал. 79). Тоді ці дуги можна записати так: $\smile AMB$ (або $\overset{\frown}{AMB}$) та $\smile ANB$ (або $\overset{\frown}{ANB}$). Якщо зрозуміло, про яку саме дугу йдеться, то для її позначення достатньо вказати лише кінці дуги, наприклад $\overset{\frown}{AB}$ (або $\smile AB$).



Мал. 79



Мал. 80

Дугу кола можна вимірювати у градусах.

Градусною мірою дуги кола **називають градусну міру відповідного центрального кута.**

Наприклад, якщо $\angle AOB = 70°$, то $\overset{\frown}{AMB} = 70°$ (мал. 79).

Очевидно, що градусна міра дуги, яка є півколом, дорівнює $180°$, а дуги, що є колом, – $360°$. На малюнку 79: $\overset{\frown}{ANB} =$ $= 360° - 70° = 290°$.

Вписаним кутом **називають кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають це коло.**

На малюнку 80 сторони вписаного кута ABC перетинають коло в точках A і C. Кажуть, що цей кут *спирається на дугу AMC*.

Зрозуміло, що точки перетину сторін вписаного кута з колом ділять коло на дві дуги. З них тією, на яку спирається вписаний кут, буде дуга, що не містить його вершини. Наприклад, на малюнку 80 сторони вписаного кута ABC поділили коло на дві дуги: $\overset{\frown}{ABC}$ і $\overset{\frown}{AMC}$. Оскільки $\overset{\frown}{AMC}$ не містить вершини кута (точки B), то вона і є дугою, на яку спирається вписаний кут ABC. Цю дугу виділено кольором.

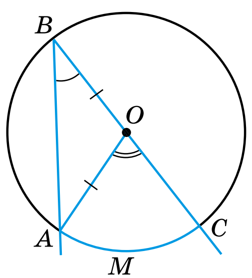
Т е о р е м а (про вписаний кут). **Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.**

Д о в е д е н н я. Нехай $\angle ABC$ є вписаним у коло із центром O та спирається на дугу AC (мал. 80). Доведемо, що $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}$. Розглянемо три можливі випадки розташування центра кола відносно даного вписаного кута.

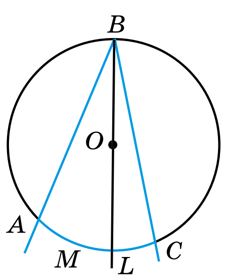
1) Нехай центр кола – точка O лежить на одній зі сторін кута, наприклад BC (мал. 81). Центральний кут AOC є зовнішнім кутом трикутника AOB. Тоді, за властивістю зовнішнього кута, $\angle AOC = \angle ABO + \angle OAB$. Але $\triangle AOB$ – рівнобедрений ($AO = OB$ як радіуси), тому $\angle ABO = \angle OAB$. Отже, $\angle AOC = 2\angle ABO$, тобто $\angle ABC = \angle ABO = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AOC}$. Але ж $\angle AOC = \overset{\frown}{AMC}$. Отже, $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AOC}$.

2) Нехай центр кола лежить усередині вписаного кута (мал. 82). Проведемо промінь BO, що перетинає коло в точці L. Тоді $\angle ABC = \angle ABL + \angle LBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AL} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{LC} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AL} + \overset{\frown}{LC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}$.

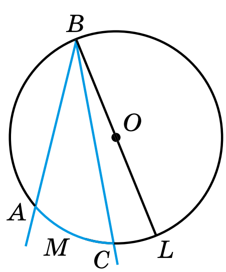
3) Нехай центр кола лежить зовні вписаного кута (мал. 83). Тоді $\angle ABC = \angle ABL - \angle CBL = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AL} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{LC} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AL} - \overset{\frown}{LC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}$. ▲



Мал. 81



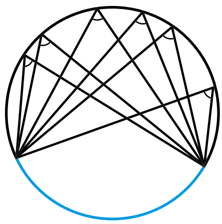
Мал. 82



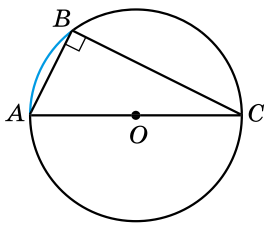
Мал. 83

Н а с л і д о к 1. **Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, між собою рівні** (мал. 84).

Н а с л і д о к 2. **Вписаний кут, що спирається на діаметр, – прямий** (мал. 85).



Мал. 84



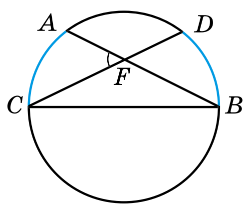
Мал. 85

Задача 1. Доведіть, що кут з вершиною всередині кола вимірюється півсумою двох дуг, з яких одна міститься між сторонами кута, а друга – між продовженням сторін.

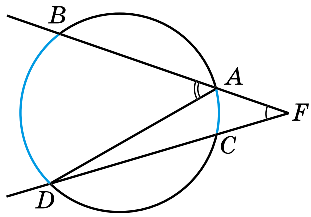
Д о в е д е н н я. Розглянемо $\angle AFC$, вершина якого знаходиться всередині кола (мал. 86). Доведемо, що $\angle AFC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{BD})$.

$\angle AFC$ – зовнішній для трикутника BCF. Маємо:

$$\angle AFC = \angle FBC + \angle FCB = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{BD} = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{BD}).$$ ▲



Мал. 86



Мал. 87

Задача 2. Доведіть, що кут між двома січними, які перетинаються зовні кола, вимірюється піврізницею більшої і меншої дуг, які містяться між його сторонами.

Д о в е д е н н я. Розглянемо $\angle BFD$, вершина якого лежить зовні кола, а FB і FD – січні кола (мал. 87). Доведемо, що $\angle DFB = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{BD} - \overset{\smile}{AC})$.

$\angle BAD$ – зовнішній кут трикутника ADF. Маємо:

$\angle DAB = \angle ADC + \angle DFB$; тобто $\frac{1}{2}\overset{\smile}{BD} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC} + \angle DFB$.

Тому $\angle DFB = \frac{1}{2}\smile{BD} - \frac{1}{2}\smile{AC} = \frac{1}{2}(\smile{BD} - \smile{AC})$. ▲

А ще раніше...

Доведення теореми про вписаний кут зустрічається ще в «Началах» Евкліда. Але ще раніше цей факт, як припущення, уперше висловив Гіпократ Хіоський (V ст. до н. е.).

Те, що вписаний кут, який спирається на діаметр, є прямим, знали вавилоняни 4000 років тому, а перше доведення цього факту приписують Фалесу Мілетському.

1. Який кут називають центральним?
2. Що називають градусною мірою дуги кола?
3. Який кут називають вписаним?
4. Сформулюйте і доведіть теорему про вписаний кут.

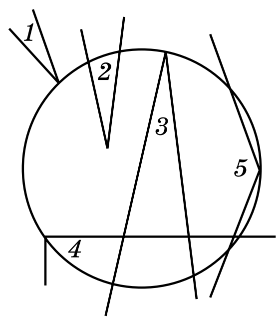
1 Початковий рівень

230. (Усно.) Які з кутів на малюнку 88 є вписаними в коло?

231. Визначте градусну міру кута, вписаного в коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює: 1) 70°; 2) 190°.

232. Визначте градусну міру центрального кута, якщо градусна міра відповідного йому вписаного кута дорівнює: 1) 20°; 2) 100°.

233. Точки A і B належать колу і лежать по один бік від хорди CD. Знайдіть $\angle CAD$, якщо $\angle CBD = 55°$.



Мал. 88

2 Середній рівень

234. Точки A і B належать колу і лежать по різні боки від хорди MN. Доведіть, що $\angle MAN + \angle MBN = 180°$.

235. Точки M і N належать колу і лежать по різні боки від хорди AB. Знайдіть $\angle AMB$, якщо $\angle ANB = 70°$.

236. Точка P кола і його центр O лежать по різні боки від хорди CD. Знайдіть $\angle COD$, якщо $\angle CPD = 126°$.

237. Точка A кола і його центр O лежать по різні боки від хорди LK. Знайдіть $\angle LAK$, якщо $\angle LOK = 128°$.

238. Хорда розбиває коло на дві дуги у відношенні 1 : 2. Знайдіть міри вписаних кутів, що спираються на ці дуги.

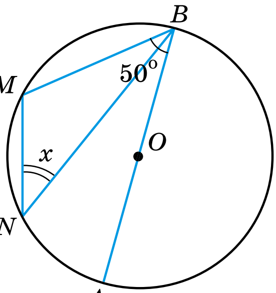
3 Достатній рівень

239. Хорда AB дорівнює радіусу кола. Точка C кола і його центр лежать по один бік від хорди AB. Знайдіть $\angle ACB$.

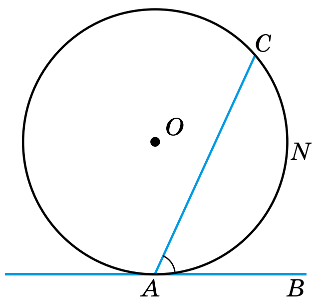
240. Хорди AD і BC перетинаються в точці F. $\angle ABC = 20°$, $\angle BCD = 80°$. Знайдіть градусну міру кута AFB.

241. Хорди AB і CD перетинаються в точці M. $\angle ABC = 35°$, $\angle BAD = 55°$. Доведіть, що хорди AB і CD взаємно перпендикулярні.

242. O – центр кола, $\angle MBA = 50°$ (мал. 89). Знайдіть x.



Мал. 89



Мал. 90

4 Високий рівень

243. Доведіть, що кут між дотичною і хордою, що виходить з точки дотику, дорівнює половині дуги, яка лежить між сторонами кута, тобто $\angle CAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CNA}$ (мал. 90).

244. Рівнобедрений трикутник ABC вписано в коло із центром у точці O. $\angle AOB = 80°$. Знайдіть кути трикутника ABC. Скільки розв'язків має задача?

245. Рівнобедрений трикутник MNK вписано в коло із центром у точці O. $\angle MOK = 100°$. Знайдіть кути трикутника MNK. Скільки розв'язків має задача?

246. Знайдіть геометричне місце вершин прямокутних трикутників зі спільною гіпотенузою.

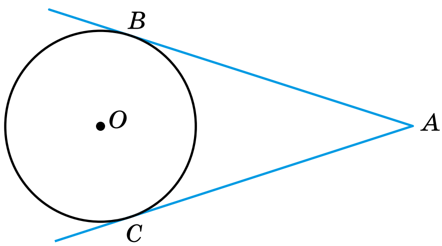
Вправи для повторення

247. У прямокутній трапеції більша бічна сторона вдвічі більша за меншу. Знайдіть кути трапеції.

248. Сторони паралелограма дорівнюють a і b ($a > b$). Знайдіть відрізки, на які бісектриса гострого кута ділить його більшу сторону.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

249. З точки A до кола проведено дві дотичні, B і C – точки дотику (мал. 91). Знайдіть довжини відрізків AB і AC дотичних, якщо їх сума дорівнює 16 см.



Мал. 91

Цікаві задачі для учнів неледачих

250. У кожній клітинці прямокутної дошки розміром 2017×2019 клітинок сидить жук. За сигналом усі жуки переповзають на сусідні (по горизонталі або вертикалі) клітинки. Чи обов'язково при цьому залишиться вільна клітинка?

§ 8. ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ

***Чотирикутник* називають *вписаним у коло*, якщо всі його вершини лежать на колі. *Коло* при цьому називають *описаним* навколо чотирикутника** (мал. 92)**.**

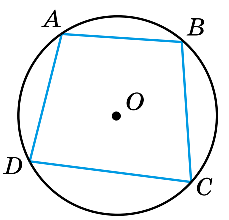
Теорема 1 (властивість кутів вписаного чотирикутника). **Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°.**

Д о в е д е н н я. Нехай у коло із центром O вписано чотирикутник $ABCD$ (мал. 92). Тоді $\angle A = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DCB}$, $\angle C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DAB}$ (за теоремою про вписаний кут).

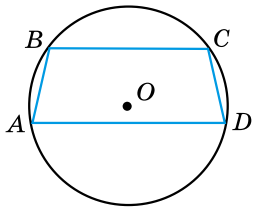
Тому $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DCB} + \overset{\frown}{DAB}) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$. Тоді $\angle B + \angle D = 360° - 180° = 180°$. ▲

Н а с л і д о к 1. **Якщо навколо трапеції можна описати коло, то вона рівнобічна.**

Д о в е д е н н я. Нехай трапеція $ABCD$ – вписана в коло, $AD \parallel CB$ (мал. 93). Тоді $\angle A + \angle C = 180°$. Але ж у трапеції $\angle D + \angle C = 180°$. Тому $\angle A = \angle D$. Отже, $ABCD$ – рівнобічна трапеція (за ознакою рівнобічної трапеції). ▲



Мал. 92



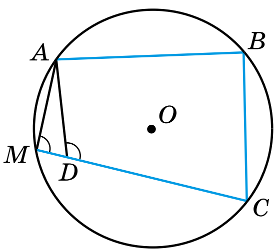
Мал. 93

Як відомо з курсу геометрії 7 класу, навколо будь-якого трикутника можна описати коло. Про чотирикутники те саме сказати не можна.

Т е о р е м а 2 (ознака вписаного чотирикутника). **Якщо в чотирикутнику сума двох протилежних кутів дорівнює 180°, то навколо нього можна описати коло.**

Д о в е д е н н я. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $\angle A + \angle C = 180°$. Проведемо через точки A, B і C коло. Доведемо, що вершина D чотирикутника також лежатиме на цьому колі (методом від супротивного).

1) Припустимо, що вершина D лежить усередині кола (мал. 94). Продовжимо CD до перетину з колом у точці M. Тоді $\angle B + \angle D = 180°$ (за умовою) і $\angle M + \angle B = 180°$ (за властивістю кутів вписаного чотирикутника). Звідси $\angle D = \angle M$. Але ж $\angle ADC$ – зовнішній, а $\angle AMC$ – не суміжний з ним внутрішній кут трикутника ADM. Тому $\angle ADC$ має



Мал. 94

бути більшим за $\angle AMC$. Прийшли до протиріччя, отже, наше припущення хибне і точка D не може лежати всередині кола.

2) Аналогічно можна довести, що вершина D не може лежати зовні кола.

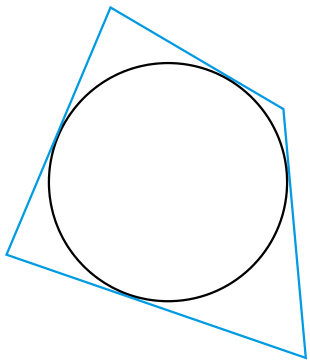
3) Отже, точка D лежить на колі (мал. 92), а тому навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло. ▲

Наслідок 1. **Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло.**

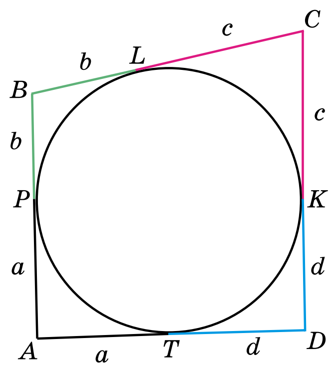
Наслідок 2. **Навколо рівнобічної трапеції можна описати коло.**

Зауважимо, що, як і для трикутника, центром кола, описаного навколо чотирикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін. Так, наприклад, центр кола, описаного навколо прямокутника, збігається з точкою перетину його діагоналей.

Чотирикутник **називають** ***описаним навколо кола*****, якщо всі його сторони дотикаються до кола.** ***Коло*** **при цьому називають** ***вписаним*** **у чотирикутник** (мал. 95).



Мал. 95



Мал. 96

Теорема 3 (властивість сторін описаного чотирикутника). **В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін між собою рівні.**

Доведення. Нехай чотирикутник $ABCD$ – описаний, P, L, K, T – точки дотику (мал. 96). За властивістю відрізків дотичних, проведених з однієї точки до кола, $AP = AT = a$, $BP = BL = b$, $CK = CL = c$, $DK = DT = d$. На малюнку 96 рівні між собою відрізки позначено однаковим кольором.

Тоді $AD + BC = AT + TD + BL + LC = a + d + b + c$;

$AB + CD = AP + PB + CK + KD = a + b + c + d.$

Отже, $AD + BC = AB + CD$. ▲

Як відомо з курсу геометрії 7 класу, у будь-який трикутник можна вписати коло. Про чотирикутник те саме сказати не можна.

Т е о р е м а 4 (ознака описаного чотирикутника). **Якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в цей чотирикутник можна вписати коло.**

Доведення цієї теореми є досить громіздким, а тому його не наводимо.

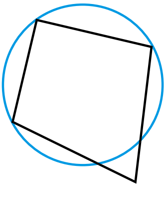
Н а с л і д о к. **У будь-який ромб можна вписати коло.**

Як і для трикутника, центром кола, вписаного в чотирикутник, є точка перетину бісектрис його кутів. Оскільки діагоналі ромба є бісектрисами його кутів, то центром кола, вписаного в ромб, є точка перетину діагоналей.

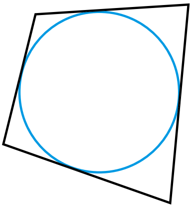
1. Який чотирикутник називають вписаним у коло?
2. Сформулюйте і доведіть властивість кутів вписаного чотирикутника.
3. Сформулюйте наслідок із цієї властивості.
4. Сформулюйте ознаку вписаного чотирикутника та наслідки з неї.
5. Який многокутник називають описаним навколо кола?
6. Сформулюйте і доведіть властивість сторін описаного чотирикутника.
7. Сформулюйте ознаку описаного чотирикутника і наслідок з неї.

1 Початковий рівень

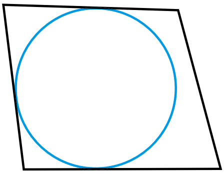
251. На яких з малюнків 97–100 зображено вписані чотирикутники, а на яких – описані?



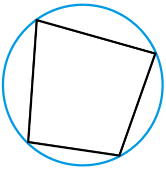
Мал. 97



Мал. 98



Мал. 99



Мал. 100

252. Чи можна навколо чотирикутника $ABCD$ описати коло, якщо:
1) $\angle A = 30°$; $\angle C = 150°$; 2) $\angle B = 90°$; $\angle D = 80°$?

253. Чи може чотирикутник $MNKL$ бути вписаним у коло, якщо:
1) $\angle M = 20°$; $\angle K = 150°$; 2) $\angle N = 90°$; $\angle L = 90°$?

2 Середній рівень

254. Чи можна вписати коло в чотирикутник, сторони якого в порядку слідування відносяться як:
1) 5 : 3 : 4 : 7; 2) 3 : 2 : 4 : 5?

255. Чи може бути описаним чотирикутник, сторони якого в порядку слідування відносяться як:
1) 7 : 3 : 2 : 6; 2) 5 : 4 : 3 : 6?

256. Знайдіть кути A і B чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle C = 132°$; $\angle D = 29°$.

257. Знайдіть кути C і D чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle A = 138°$; $\angle B = 49°$.

3 Достатній рівень

258. У рівнобічну трапецію, периметр якої дорівнює 16 см, вписано коло. Знайдіть бічну сторону трапеції.

259. Бічна сторона рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 5 дм. Знайдіть периметр трапеції.

260. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AH_1 і BH_2, які перетинаються в точці H. Доведіть, що навколо чотирикутника CH_1HH_2 можна описати коло, діаметром якого буде відрізок CH.

261. Точка M лежить на стороні AB гострокутного трикутника ABC. MP і MK – перпендикуляри до сторін AC і BC відповідно. Доведіть, що навколо чотирикутника $MPCK$ можна описати коло, діаметром якого буде відрізок CM.

4 Високий рівень

262. Трапецію вписано в коло радіуса R так, що діаметр кола є її більшою основою. Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює бічній стороні.

Вправи для повторення

263. AB – основа рівнобедреного трикутника ABC, I – центр вписаного кола. $\angle AIB = \alpha$ ($\alpha > 90°$). Знайдіть кути трикутника ABC.

264. AB – основа рівнобедреного трикутника ABC, O – центр описаного кола. $\angle AOB = \alpha$ ($\alpha < 180°$). Знайдіть кути трикутника ABC. Скільки випадків слід розглянути?

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

265. Пряма EK паралельна стороні AB трикутника ABC, $E \in AC$, $K \in BC$. Доведіть, що $\angle CKE = \angle CBA$, $\angle CEK = \angle CAB$.

Цікаві задачі для учнів неледачих

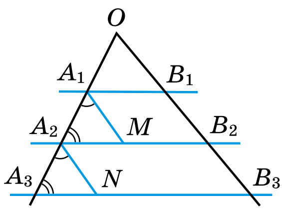
266. Побудуйте спільну зовнішню дотичну до двох кіл різних радіусів, які не мають спільних точок.

§ 9. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Теорема Фалеса. **Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні між собою відрізки, то вони відтинають рівні між собою відрізки і на другій його стороні.**

Доведення. Нехай паралельні прямі A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 перетинають сторони кута з вершиною O (мал. 101), причому $A_1A_2 = A_2A_3$. Доведемо, що $B_1B_2 = B_2B_3$.

1) Проведемо через точки A_1 і A_2 прямі A_1M і A_2N, паралельні прямій OB_3. $A_1A_2 = A_2A_3$ (за умовою), $\angle A_2A_1M = \angle A_3A_2N$ (як відповідні кути при паралельних прямих A_1M і A_2N), $\angle A_1A_2M = \angle A_2A_3N$ (як відповідні кути при паралельних прямих A_2M і A_3N). Тому $\triangle A_1A_2M = \triangle A_2A_3N$ (за стороною і двома прилеглими кутами), а значить $A_1M = A_2N$ (як відповідні сторони рівних трикутників).



Мал. 101

2) Чотирикутник $A_1MB_2B_1$ – паралелограм (за побудовою). Тому $A_1M = B_1B_2$. Аналогічно $A_2NB_3B_2$ – паралелограм, тому $A_2N = B_2B_3$. Отже, $A_1M = A_2N$,

$A_1M = B_1B_2$, $A_2N = B_2B_3$. Звідки $B_1B_2 = B_2B_3$, що й треба було довести. ▲

Н а с л і д о к. **Паралельні прямі, які перетинають дві дані прямі і відтинають на одній з них рівні відрізки, відтинають рівні відрізки і на другій прямій.**

За теоремою Фалеса можна поділити відрізок на будь-яку кількість рівних частин, використовуючи лінійку без поділок.

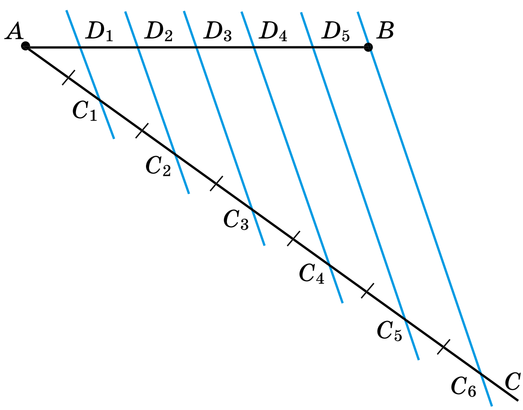
Задача. Поділіть відрізок AB на 6 рівних частин.

Р о з в' я з а н н я. 1) Нехай AB – даний відрізок (мал. 102). Проведемо довільний промінь AC і відкладемо на ньому циркулем послідовно 6 відрізків: $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5 = C_5C_6$.

2) Через точки C_6 і B проведемо пряму.

3) Через точки C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 проведемо за допомогою косинця і лінійки прямі, паралельні пярмій BC_6. За теоремою Фалеса ці прямі поділять відрізок AB на 6 рівних між собою частин:

$$AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = D_3D_4 = D_4D_5 = D_5B. \ ▲$$



Мал. 102

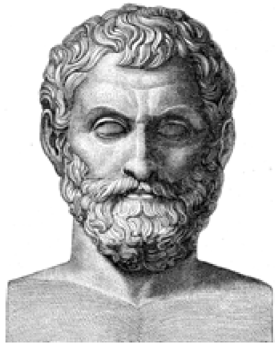
А ще раніше...

Фалес Мілетський – давньогрецький математик і астроном. За давньою традицією його вважають одним з так званих семи мудреців світу, адже він був одним з найвидатніших математиків свого часу.

Ще в молоді роки допитливий юнак вирушив у подорож до Єгипту, щоб ознайомитися з єгипетською культурою та вивчити природничі науки. Будучи здібним та обдарованим, Фалес не тільки швидко вивчив те, що на той час уже було відомо єгипетським вченим, а й зробив низку власних наукових відкриттів. Він самостійно визначив висоту єгипетських пірамід за їхньою тінню, чим дуже здивував єгипетського фараона Амазіса. А повернувшись на батьківщину, заснував у Мілеті філософську школу.

Історики вважають, що Фалес був першим, хто ознайомив греків з геометрією, і став першим грецьким астрономом. Фалес передбачив сонячне затемнення, яке відбулося 28 травня 585 року до н. е.

На гробниці Фалеса вирізьблено: «Наскільки є малою ця гробниця, настільки великою є слава цього царя астрономії в галузі зірок».



Фалес Мілетський
(бл. 625–548 до н. е.)

Сформулюйте і доведіть теорему Фалеса.

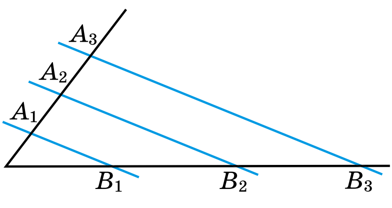
1 Початковий рівень

267. (Усно.) На малюнку 103 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = 3$ см, $A_2A_3 = 3$ см, $B_1B_2 = 5$ см. Знайдіть B_2B_3.

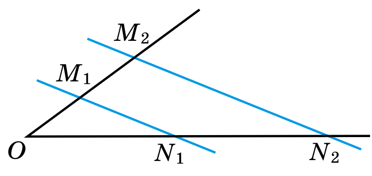
268. На малюнку 103 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $B_1B_2 = B_2B_3$, $A_2A_3 = 7$ см. Знайдіть A_1A_2.

269. На малюнку 104 $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $OM_1 = M_1M_2$, $ON_1 = 4$ см. Знайдіть ON_2.

270. На малюнку 104 $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $ON_1 = 6$ см, $N_1N_2 = 6$ см, $OM_1 = 3{,}5$ см. Знайдіть OM_2.



Мал. 103



Мал. 104

2 Середній рівень

271.[1] Поділіть даний відрізок на 5 рівних частин.

272. Поділіть даний відрізок на 7 рівних частин.

[1] Задачі 271–274 необхідно розв'язати із застосуванням лінійки без поділок.

Достатній рівень

273. Поділіть даний відрізок на дві частини, відношення яких дорівнює 2 : 5.

274. Поділіть даний відрізок на дві частини у відношенні 3 : 2.

275. На малюнку 103 $A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$. $A_1A_2 : B_1B_2 = 3 : 5$, $B_2B_3 - A_2A_3 = 8$ см. Знайдіть A_1A_2, A_2A_3, B_1B_2, B_2B_3.

276. На малюнку 104 $ON_1 = N_1N_2$, $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $ON_1 : OM_1 = 7 : 4$, $N_1N_2 + M_1M_2 = 33$ см. Знайдіть ON_2 і OM_2.

Високий рівень

277. M і N – відповідно середини сторін AB і CD паралелограма $ABCD$. Відрізки MD і BN перетинають діагональ AC у точках L і K відповідно. Доведіть, що $AL = LK = KC$.

278. Точки E, F і G ділять медіану AD трикутника ABC на чотири рівні частини ($AE = EF = FG = GD$). Доведіть, що пряма CG ділить сторону AB у відношенні 3 : 2, починаючи від вершини A.

279. Точки M і N ділять медіану AD трикутника ABC на три рівні частини ($AM = MN = ND$). Доведіть, що пряма BN містить медіану трикутника.

280. Точка K – середина медіани AD трикутника ABC. Відрізок BK перетинає сторону AC у точці M. Знайдіть $AM : MC$.

Вправи для повторення

281. Побудуйте відрізок AB завдовжки 5 см та геометричне місце точок, рівновіддалених від його кінців.

282. З точки кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди, які віддалені від центра на відстані 5 см і 7 см. Знайдіть довжини цих хорд.

Цікаві задачі для учнів неледачих

283. (*Всеукраїнська олімпіада з математики, 1976 р.*) Усередині гострокутного трикутника ABC дано точку P таку, що $\angle APB = \angle ACB + 60°$, $\angle BPC = \angle BAC + 60°$, $\angle CPA = \angle CBA + 60°$. Доведіть, що основи перпендикулярів, проведених з точки P до сторін трикутника ABC, є вершинами рівностороннього трикутника.

§ 10. СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

***Середньою лінією трикутника* називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін.**

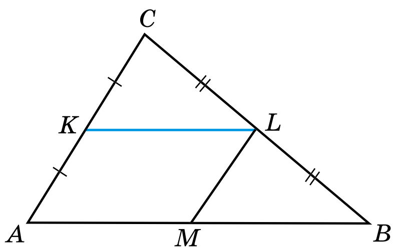
На малюнку 105 KL – середня лінія трикутника ABC.

Т е о р е м а 1 (властивість середньої лінії трикутника). **Середня лінія трикутника, що сполучає середини двох сторін, паралельна третій стороні і дорівнює її половині.**

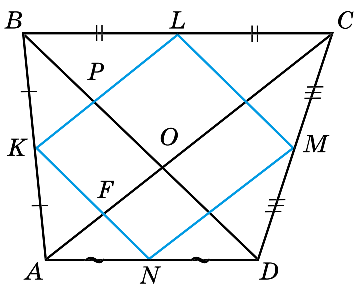
Д о в е д е н н я. Нехай KL – середня лінія трикутника ABC (мал. 105). Доведемо, що $KL \parallel AB$ і $KL = \frac{1}{2}AB$.

1) Проведемо через точку L пряму, паралельну AB. За теоремою Фалеса вона перетинає сторону AC в її середині, тобто в точці K. Отже, ця пряма містить середню лінію KL. Тому $KL \parallel AB$.

2) Проведемо через точку L пряму, паралельну AC, яка перетинає AB у точці M. Тоді $AM = MB$ (за теоремою Фалеса). Чотирикутник $AKLM$ – паралелограм. $KL = AM$ (за властивістю паралелограма), але $AM = \frac{1}{2}AB$. Тому $KL = \frac{1}{2}AB$. ▲



Мал. 105



Мал. 106

Задача. Доведіть, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма, один з кутів якого дорівнює куту між діагоналями чотирикутника.

Д о в е д е н н я. Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник, а точки K, L, M, N – середини його сторін (мал. 106).

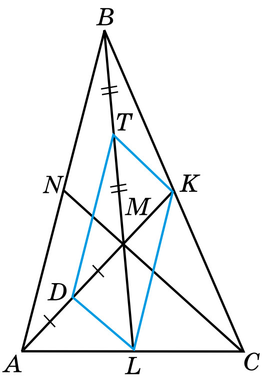
KL – середня лінія трикутника ABC, тому $KL \parallel AC$ і $KL = \frac{1}{2}AC$. Аналогічно $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$.

Отже, $KL \parallel MN$, $KL = MN$. Тоді $KLMN$ – паралелограм (за ознакою паралелограма).

KN – середня лінія трикутника ABD. Тому $KN \parallel BD$. Отже, $KFOP$ – також паралелограм, звідки: $\angle NKL = \angle BOA$. ▲

Розглянемо властивість медіан трикутника.

Т е о р е м а 2 (властивість медіан трикутника). **Медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника.**



Мал. 107

Д о в е д е н н я. Нехай M – точка перетину медіан AK і CN трикутника ABC (мал. 107).

1) Побудуємо чотирикутник $LDTK$, де D – середина AM, T – середина BM.

2) DT – середня лінія трикутника ABM, тому $DT \parallel AB$ і $DT = \frac{1}{2}AB$.

3) KL – середня лінія трикутника ABC, тому $KL \parallel AB$ і $KL = \frac{1}{2}AB$.

4) Отже, $DT \parallel KL$ і $DT = KL$. Тому $DTKL$ – паралелограм (за ознакою).

5) M – точка перетину діагоналей TL і DK паралелограма $DTKL$, тому $MT = ML$, $DM = MK$. Але $MT = BT$, $DM = AD$. Тоді $BT = TM = ML$ і $AD = DM = MK$. Отже, точка M ділить кожну з медіан AK і BL у відношенні 2 : 1, починаючи від вершин A і B відповідно.

6) Точка перетину медіан AK і CN повинна також ділити у відношенні 2 : 1 кожну медіану. Оскільки існує єдина точка – точка M, яка в такому відношенні ділить медіану AK, то медіана CN також проходить через цю точку.

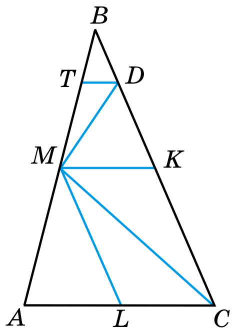
7) Отже, три медіани трикутника перетинаються в одній точці і цією точкою діляться у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника. ▲

Точку перетину медіан ще називають *центром мас трикутника*, або *центроїдом трикутника*.

1. Що називають середньою лінією трикутника?
2. Сформулюйте і доведіть властивість середньої лінії трикутника.
3. Сформулюйте властивість медіан трикутника.

1 Початковий рівень

284. (Усно.) Які відрізки на малюнку 108 є середніми лініями трикутника ABC, де $AM = MB$, $BK = KC$, $AL = LC$?



Мал. 108

285. Накресліть довільний тупокутний трикутник MNK і його найбільшу середню лінію.

286. Накресліть рівнобедрений трикутник ABC і його середню лінію, кінці якої належать бічним сторонам.

287. KL – середня лінія трикутника ABC (мал. 105).

1) AB =14 см. Знайдіть KL;

2) KL = 6 дм. Знайдіть AB.

288. KL – середня лінія трикутника ABC (мал. 105).

1) AB = 20 см. Знайдіть KL;

2) KL = 7 дм. Знайдіть AB.

2 Середній рівень

289. Відрізок, що сполучає середини бічних сторін рівнобедреного трикутника, дорівнює 5 см. Знайдіть основу трикутника.

290. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 18 дм. Знайдіть довжину відрізка, що сполучає середини бічних сторін трикутника.

291. Знайдіть периметр трикутника, якщо його середні лінії дорівнюють 7 см, 8 см і 10 см.

292. Сторони трикутника дорівнюють 12 дм, 16 дм і 18 дм. Знайдіть периметр трикутника, сторонами якого є середні лінії цього трикутника.

293. Дано: ED – середня лінія трикутника ABC, $E \in AC$, $D \in BC$. Довести: $\angle CED = \angle CAB$.

294. (Усно.) Визначте вид трикутника, якщо:

1) дві його середні лінії рівні між собою;

2) три його середні лінії рівні між собою.

295. Дано трикутник, периметр якого дорівнює 24 см. Знайдіть периметр трикутника, вершини якого є серединами сторін даного трикутника.

296. Периметр трикутника, вершини якого – середини сторін даного трикутника, – дорівнює 18 см. Знайдіть периметр даного трикутника.

3 Достатній рівень

297. Сторони трикутника відносяться як 4 : 3 : 5. Знайдіть його сторони, якщо периметр трикутника, утвореного середніми лініями даного трикутника, дорівнює 60 см.

298. Периметр трикутника дорівнює 80 см. Сторони трикутника, утвореного середніми лініями даного трикутника, відносяться як 4 : 9 : 7. Знайдіть сторони даного трикутника.

299. Сторона трикутника дорівнює 10 см, а одна із середніх ліній – 6 см. Знайдіть дві інші сторони трикутника, якщо одна з них у 1,5 раза більша за другу. Скільки випадків слід розглянути?

300. E, F, G, H – середини сторін AB, BC, CD і DA опуклого чотирикутника $ABCD$. Знайдіть периметр чотирикутника $EFGH$, якщо $AC = 16$ см, $BD = 10$ см.

301. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см. Чому дорівнює периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін цього прямокутника?

302. O – точка перетину діагоналей ромба $ABCD$. Точки M і K – середини сторін AD і DC відповідно. Доведіть, що $MK \perp OD$.

303. AK – медіана рівнобедреного трикутника ABC з основою BC. Точки P і F – середини сторін AB і AC відповідно. Доведіть, що $PF \perp AK$.

304. Доведіть, що коли два трикутники рівні, то рівні й трикутники, вершинами яких є середини сторін даних трикутників.

4 Високий рівень

305. Точка M – середина катета AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Відстань від точки M до гіпотенузи дорівнює a см. Знайдіть гіпотенузу.

306. Точка K – середина катета BC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC з гіпотенузою $AB = 20$ см. Знайдіть відстань від точки K до гіпотенузи.

307. Доведіть, що середини сторін ромба є вершинами прямокутника.

308. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = AC$) M – точка перетину медіан. Відомо, що $AM = 8$ см. Знайдіть відстань від середини бічної сторони до основи трикутника.

309. Середина бічної сторони рівнобедреного трикутника KLM ($KL = KM$) віддалена від основи трикутника на 9 см. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника до вершини K.

Вправи для повторення

2 **310.** У трикутнику ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 80°$, O – центр описаного кола. Знайдіть $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$.

3 **311.** Одна з діагоналей ромба утворює зі стороною кут 30°, а друга діагональ дорівнює 7 см. Знайдіть периметр ромба.

4 **312.** У рівнобічній трапеції основи дорівнюють a і b ($a > b$), а гострий кут – 60°. Знайдіть:
1) бічну сторону трапеції; 2) периметр трапеції;
3) умову, за якої у трапецію можна вписати коло.

Цікаві задачі для учнів неледачих

313. Чи існує трикутник, дві бісектриси якого взаємно перпендикулярні?

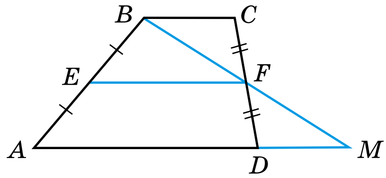
§ 11. СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРАПЕЦІЇ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Середньою лінією трапеції **називають відрізок, що сполучає середини її бічних сторін.**

Розглянемо властивість середньої лінії трапеції.

Теорема (властивість середньої лінії трапеції). **Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.**

Доведення. Нехай $ABCD$ – дана трапеція, EF – її середня лінія (мал. 109). Доведемо, що $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$ і $EF = \frac{AD+BC}{2}$.



Мал. 109

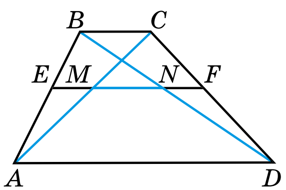
1) Проведемо промінь BF до його перетину з променем AD. Нехай M – точка їх перетину. Тоді $\angle BCF = \angle MDF$ (як внутрішні різносторонні при паралельних прямих BC і AM та січній CD), $\angle CFB = \angle DFM$ (як вертикальні), $CF = FD$ (за умовою). Отже, $\triangle CFB = \triangle DFM$ (за стороною і двома прилеглими кутами), звідки $BF = FM$, $BC = DM$ (як відповідні сторони рівних трикутників).

2) Оскільки $BF = FM$, то EF – середня лінія трикутника ABM. Тоді, за властивістю середньої лінії трикутника, $EF \parallel AM$, отже, $EF \parallel AD$. А оскільки $AD \parallel BC$, то $EF \parallel BC$.

3) Окрім того, $EF = \frac{1}{2}AM = \frac{AD+DM}{2} = \frac{AD+BC}{2}$. ▲

Задача 1. Доведіть, що відрізок середньої лінії трапеції, який міститься між її діагоналями, дорівнює піврізниці основ.

Д о в е д е н н я. Нехай EF – середня лінія трапеції $ABCD$, M – точка перетину AC і EF, N – точка перетину BD і EF (мал. 110). Нехай $AD = a$, $BC = b$. Доведемо, що $MN = \frac{a-b}{2}$.



Мал. 110

1) Оскільки $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$ і $AE = BE$, то за теоремою Фалеса: M – середина AC, N – середина BD. Тому EM – середня лінія трикутника ABC, NF – середня лінія трикутника DBC. Тоді $EM = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2}$; $NF = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2}$.

2) EF – середня лінія трапеції, тому $EF = \frac{a+b}{2}$.

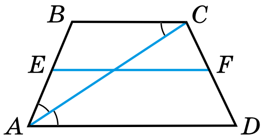
3) $MN = EF - (EM + NF) = \frac{a+b}{2} - \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right) = \frac{a-b}{2}$. ▲

Задача 2. У рівнобічній трапеції діагональ ділить гострий кут навпіл. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її основи відносяться як 3 : 7, а периметр – 48 см.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $ABCD$ – дана трапеція, $BC : AD = 3 : 7$, $\angle CAD = \angle BAC$, EF – середня лінія (мал. 111).

1) Позначимо $BC = 3x$, $AD = 7x$. Тоді

$$EF = \frac{AD+BC}{2} = \frac{7x+3x}{2} = \frac{10x}{2} = 5x \text{ (см)}.$$



Мал. 111

2) $\angle CAD = \angle BCA$ (як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AC). $\angle CAD = \angle BAC$ (за умовою). Тому $\angle BCA = \angle BAC$. Отже, $\triangle BAC$ – рівнобедрений (за ознакою рівнобедреного трикутника). Тоді $AB = BC$. Але $AB = CD$ (за умовою). Отже, $AB = BC = CD = 3x$ (см).

3) Оскільки $P_{ABCD} = 48$ см, маємо рівняння:

$7x + 3x + 3x + 3x = 48$, звідки $x = 3$ (см).

4) Тоді $EF = 5 \cdot 3 = 15$ (см).

А ще раніше...

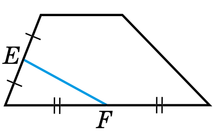
Те, що середня лінія трапеції дорівнює півсумі її основ, було відомо ще давнім єгиптянам; цю інформацію містив папірус Ахмеса (близько XVII ст. до н. е.).

Про властивість середньої лінії трапеції знали й вавилонські землеміри; про неї також згадується і у працях Герона Александрійського (перша половина I ст. н. е.).

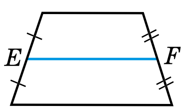
1. Що називають середньою лінією трапеції?
2. Сформулюйте і доведіть властивість середньої лінії трапеції.

1 Початковий рівень

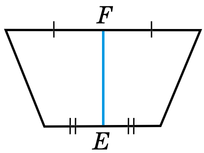
314. (Усно.) На яких з малюнків 112–115 відрізок EF є середньою лінією трапеції?



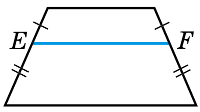
Мал. 112



Мал. 113



Мал. 114



Мал. 115

315. Основи трапеції дорівнюють 8 см і 4 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

316. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її основи дорівнюють 7 см і 11 см.

2 Середній рівень

317. Знайдіть основу трапеції, якщо її друга основа дорівнює 9 см, а середня лінія – 7 см.

318. Одна з основ трапеції дорівнює 5 см, а середня лінія – 10 см. Знайдіть другу основу трапеції.

319. Одна з основ трапеції дорівнює 8 см, а друга – удвічі більша за неї. Знайдіть відстань між серединами бічних сторін трапеції.

320. Середня лінія трапеції дорівнює 30 см. Знайдіть основи трапеції, якщо:
1) одна з них на 8 см більша за другу;
2) одна з них у 4 рази менша від другої;
3) вони відносяться як 3 : 2.

321. Середня лінія трапеції дорівнює 16 см. Знайдіть основи трапеції, якщо:
1) одна з них на 2 см менша від другої;
2) одна з них утричі більша за другу;
3) їх відношення дорівнює 3 : 5.

322. K – точка перетину діагоналі BD трапеції $ABCD$ з її середньою лінією MN. Доведіть, що $BK = KD$.

323. Бічні сторони трапеції дорівнюють 7 см і 9 см, а її середня лінія – 10 см. Знайдіть периметр трапеції.

324. Бічні сторони трапеції дорівнюють 10 см і 12 см, а її периметр – 52 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

3 Достатній рівень

325. Чи може середня лінія трапеції:
1) дорівнювати одній з основ;
2) бути меншою від меншої основи;
3) бути більшою за більшу основу;
4) бути вдвічі меншою від більшої основи?

326. EF – середня лінія трапеції $ABCD$, яка перетинає діагональ BD у точці N. $EN = 5$ см, $NF = 3$ см. Знайдіть основи трапеції.

327. MN – середня лінія трапеції $ABCD$, яка перетинає діагональ AC у точці K. Знайдіть MK і KN, якщо основи трапеції дорівнюють 18 см і 12 см.

328. У трапеції $ABCD$ $AD = 30$ см, $BC = 12$ см – основи, а точки E і T – середини AB і AE відповідно. Через E і T проведено прямі, паралельні AD. Знайдіть відрізки цих прямих, що містяться між бічними сторонами трапеції.

329. У трапеції $ABCD$ M – середина бічної сторони AB, N – середина MB. Через точки M і N проведено прямі, паралельні BC, які перетинають CD у точках K і L відповідно. $MK = 12$ см, $NL = 8$ см. Знайдіть основи трапеції.

330. У рівнобічній трапеції $ABCD$ перпендикуляр, проведений з вершини B на більшу основу AD трапеції, ділить її на відрізки 3 см і 7 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

331. З вершини B тупого кута рівнобічної трапеції $ABCD$ проведено висоту BK до основи AD. $AK = 4$ см, $BC = 6$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.

332. Точки A і B лежать по один бік від прямої l. Відстань до неї від точки A дорівнює 7 см, а від точки M, яка є серединою AB, – 5 см. Знайдіть відстань від точки B до прямої l.

333. По один бік від прямої a на відстані 10 см і 16 см від неї позначено точки M і N. Знайдіть відстань від середини відрізка MN до прямої a.

4 Високий рівень

334. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 14 см. Діагоналі трапеції ділять її середню лінію на три частини. Знайдіть довжини цих частин.

335. Діагоналі ділять середню лінію трапеції на три частини, довжини яких 7 см, 8 см і 7 см. Знайдіть основи трапеції.

336. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle A = 90°$, $\angle C = 135°$, $AB = 6$ см. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

337. Діагональ рівнобічної трапеції ділить навпіл тупий кут трапеції, а її середню лінію – на відрізки 4 см і 6 см. Знайдіть периметр трапеції.

338. Діагональ рівнобічної трапеції ділить її гострий кут навпіл, а середню лінію – на відрізки 3 см і 7 см. Знайдіть периметр трапеції.

Вправи для повторення

2 **339.** Знайдіть кути M і N чотирикутника $MNKL$, вписаного в коло, якщо $\angle K = 37°$, $\angle L = 119°$.

340. Коло вписано в рівнобічну трапецію, бічна сторона якої дорівнює a см. Знайдіть периметр трапеції.

341. У прямокутній трапеції тупий кут дорівнює 120°, більша основа – 14 см, а більша бічна сторона – 8 см. Знайдіть меншу основу трапеції.

Цікаві задачі для учнів неледачих

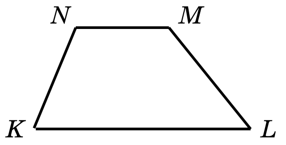
342. Усі стінки і дно картонної коробки без кришки мають форму квадрата зі стороною a. Розріжте коробку двома розрізами так, щоб з отриманих частин можна було скласти квадрат, площа якого дорівнює $5a^2$.

Домашня самостійна робота № 2

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. На мал. 116 зображено трапецію. Укажіть її основи.

А. KN і ML; **Б.** KL і MN;
В. KN і MN; **Г.** ML і MN.



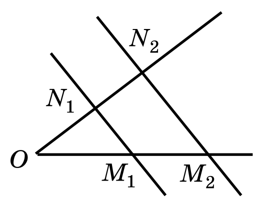
Мал. 116

2. Знайдіть градусну міру центрального кута, якщо градусна міра відповідного йому вписаного кута дорівнює 40°.

А. 40°; **Б.** 20°; **В.** 80°; **Г.** 30°.

3. На мал. 117 $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $ON_1 = N_1N_2$; $OM_2 = 16$ см. Знайдіть M_1M_2.

А. 4 см; **Б.** 8 см;
В. 6 см; **Г.** знайти неможливо.



Мал. 117

4. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. $\angle A = 20°$, $\angle B = 100°$. Знайдіть кути C і D цього чотирикутника.

А. $\angle C = 80°$; $\angle D = 160°$; **Б.** $\angle C = 150°$; $\angle D = 80°$;
В. $\angle C = 20°$; $\angle D = 100°$; **Г.** $\angle C = 160°$; $\angle D = 80°$.

5. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 4 см, а бічна сторона – 10 см. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є середини сторін даного трикутника.

А. 11 см; **Б.** 12 см; **В.** 14 см; **Г.** 16 см.

6. Середня лінія трапеції дорівнює 20 см, а її основи відносяться як 2 : 3. Знайдіть довжину меншої основи.

А. 16 см; **Б.** 24 см; **В.** 18 см; **Г.** 8 см.

7. Хорди MN і KL перетинаються в точці A; $\angle MKL = 30°$; $\angle KLN = 70°$. Знайдіть $\angle KAM$.

А. 30°; **Б.** 70°; **В.** 80°; **Г.** 100°.

8. Коло вписано в рівнобічну трапецію, бічна сторона якої дорівнює 10 см. Знайдіть периметр трапеції.

А. 50 см; **Б.** 20 см; **В.** 30 см; **Г.** 40 см.

9. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює 60°, а більша бічна сторона і менша основа – по 18 см. Знайдіть більшу основу трапеції.

А. 36 см; **Б.** 24 см; **В.** 27 см; **Г.** 30 см.

10. Діагональ рівнобічної трапеції ділить її гострий кут навпіл, а середню лінію – на відрізки 4 см і 5 см. Знайдіть периметр трапеції.

А. 32 см; **Б.** 34 см; **В.** 36 см; **Г.** 38 см.

11. Точка N – середина медіани AD трикутника ABC. BN перетинає AC у точці F. Знайдіть AF, якщо $AC = 18$ см.

А. 6 см; **Б.** 9 см; **В.** 3 см; **Г.** 2 см.

12. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 36 см. Знайдіть відстань від середини катета до гіпотенузи.

А. 12 см; **Б.** 6 см; **В.** 18 см; **Г.** 9 см.

Завдання для перевірки знань до § 6–11

1. Накресліть трапецію $MKPF$ ($MK \parallel PF$). Укажіть її основи та бічні сторони.

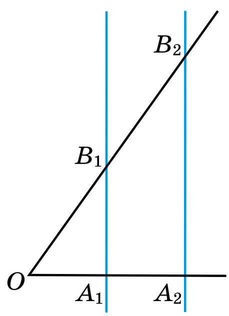
2. Знайдіть градусну міру кута, вписаного в коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює 70°.

3. На малюнку 118 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $OB_1 = B_1B_2$, $OA_1 = 2$ см. Знайдіть OA_2.

4. Знайдіть кути A і B чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle C = 140°$, $\angle D = 70°$.

5. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 12 см і 16 см. Знайдіть периметр трикутника, сторонами якого є середні лінії даного трикутника.

6. Середня лінія трапеції дорівнює 8 см. Знайдіть основи трапеції, якщо одна з них на 4 см більша за другу.



Мал. 118

7. Коло вписано в рівнобічну трапецію, периметр якої 20 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

8. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює $60°$, а більша бічна сторона і більша основа дорівнюють по 12 см. Знайдіть меншу основу.

9. Діагональ рівнобічної трапеції ділить навпіл її тупий кут, а середню лінію – на відрізки 9 см і 7 см. Знайдіть периметр трапеції.

Додаткові завдання

10. Точки K, L, M ділять медіану BD трикутника ABC на чотири рівні частини ($BK = KL = LM = MD$). AM перетинає BC у точці F. Знайдіть $CF : FB$.

11. Точка D – середина катета BC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Відстань від точки D до гіпотенузи трикутника на 15 см менша від гіпотенузи. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

Вправи для повторення розділу 1

До § 1

343. Накресліть чотирикутник $AMCN$. Запишіть вершини, сторони та кути цього чотирикутника.

344. Чи можуть у чотирикутнику три кути бути прямими, а четвертий:

1) гострим; 2) тупим?

345. Два кути чотирикутника дорівнюють $40°$ і $80°$, а два інших між собою рівні. Знайдіть невідомі кути чотирикутника.

346. Запишіть усі можливі варіанти позначення чотирикутника $ABCD$.

347. Один з кутів чотирикутника на $10°$ менший від другого, на $50°$ менший від третього і удвічі менший від четвертого. Знайдіть кути чотирикутника.

348. Усі сторони чотирикутника між собою рівні. Доведіть, що сума будь-яких двох сусідніх кутів цього чотирикутника дорівнює $180°$.

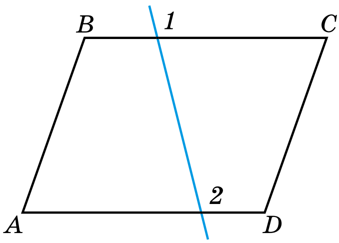
До § 2

349. Накресліть паралелограм $KMTL$, у якого кут K – тупий. Проведіть діагоналі паралелограма і позначте їх точку перетину через O. Укажіть на малюнку пари рівних між собою відрізків.

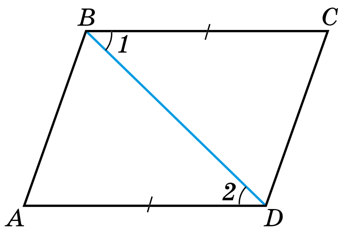
350. На малюнку 119 $ABCD$ – паралелограм, $\angle 1 = 105°$. Знайдіть $\angle 2$.

351. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle B + \angle C = 180°$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ – паралелограм.

352. На малюнку 120 $AD = BC$, $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 119



Мал. 120

353. Прямі a і b перетинаються. Побудуйте паралелограм так, щоб його діагоналі лежали на цих прямих.

354. Дано паралелограм $ABCD$ і трикутник ENM. Чи можливо, щоб одночасно виконувалися рівності $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle M$?

355. У паралелограмі $ABCD$ точка M – середина AD, N – середина BC. Доведіть, що відрізки AN і BM точкою перетину діляться навпіл.

356. Дано три точки, що не лежать на одній прямій. Скільки паралелограмів з вершинами в цих точках можна побудувати?

357. Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з однієї вершини, дорівнює куту паралелограма при сусідній вершині.

358. Доведіть, що бісектриси протилежних кутів паралелограма або паралельні, або збігаються.

359. Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 30°. Знайдіть ці висоти, якщо сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 20 см.

360. Побудуйте паралелограм за двома непаралельними сторонами і висотою, проведеною до однієї з них.

До § 3

361. Накресліть прямокутник зі сторонами 3 см і 5 см та знайдіть його периметр.

362. У чотирикутнику точка перетину діагоналей ділить діагоналі на чотири рівних між собою відрізки. З'ясуйте вид чотирикутника.

363. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає продовження сторони DC у точці N. Знайдіть $\angle AND$.

364. Побудуйте прямокутник за:
1) стороною і діагоналлю;
2) діагоналлю і кутом, який вона утворює з однією зі сторін;
3) діагоналлю і кутом між діагоналями.

365. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає сторону CD у точці M. Знайдіть периметр прямокутника, якщо $DM = 5$ см, $MC = 2$ см.

366. Точка перетину діагоналей прямокутника знаходиться від меншої сторони на 2 см далі, ніж від більшої. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 56 см.

367. Перпендикуляр, проведений з вершини прямого кута прямокутника до діагоналі, ділить її у відношенні 1 : 3. Знайдіть меншу сторону прямокутника, якщо діагональ дорівнює a см.

368. Бісектриси кутів A і D прямокутника $ABCD$ перетинають його сторону BC у точках L і K відповідно. $BL = 7$ см, $LK = 2$ см. Знайдіть периметр прямокутника $ABCD$. Скільки випадків слід розглянути?

До § 4

369. Накресліть ромб $MKLN$ з тупим кутом M та проведіть у ньому висоти MA і MB.

370. У ромбі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, $\angle BAO = 25°$. Знайдіть кути ромба.

371. Знайдіть кути ромба, якщо відношення двох з них дорівнює 2 : 3.

372. У ромбі $ABCD$ з вершини гострого кута A проведено висоти AM і AN. Доведіть, що $AM = AN$.

373. Діагоналі паралелограма взаємно перпендикулярні, а його периметр дорівнює m см. Знайдіть сторони паралелограма.

374. Кут між продовженням висоти ромба, проведеної з вершини гострого кута, і продовженням діагоналі, що сполучає вершини тупих кутів, дорівнює 40°. Знайдіть кути ромба.

375. Висота ромба дорівнює 10 см, а його периметр – 80 см. Знайдіть:
1) кути ромба;
2) кут між висотою, проведеною з вершини тупого кута ромба, і його меншою діагоналлю.

376. Побудуйте ромб за діагоналлю і висотою.

377. На сторонах прямокутника зовні нього побудовано рівносторонні трикутники. Доведіть, що вершини трикутників є вершинами ромба.

До § 5

378. Накресліть квадрат, сторона якого дорівнює 3 см. Знайдіть периметр квадрата.

379. Різниця між периметром квадрата і сумою трьох його сторін дорівнює 8 см. Знайдіть сторону квадрата і його периметр.

380. У дане коло, положення центра якого відоме, впишіть квадрат.

381. Діагональ прямокутника ділить його кут навпіл. Чи є прямокутник квадратом?

382. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ позначено точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, що $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Визначте вид чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$.

383. У квадрат вписано прямокутник так, що на кожній стороні квадрата лежить по одній вершині прямокутника, а сторони прямокутника паралельні діагоналям квадрата. Знайдіть периметр прямокутника, якщо діагональ квадрата дорівнює d см.

До § 6

384. Накресліть прямокутну трапецію $NMLK$ і рівнобічну $DCFH$. Укажіть основи трапецій та їх бічні сторони.

385. Знайдіть периметр рівнобічної трапеції, основи якої 8 см і 5 см, а бічні сторони дорівнюють меншій основі.

386. У рівнобічній трапеції один з кутів на 20° більший за другий. Знайдіть кути трапеції.

387. У прямокутній трапеції більша бічна сторона вдвічі більша за висоту. Знайдіть кути трапеції.

388. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо протилежні її кути відносяться як 4 : 5.

389. У трапеції $ABCD$ з більшою основою AD через точку K – середину CD – проведено пряму BK, що перетинає пряму AD у точці M. Доведіть, що $\triangle BKC = \triangle MKD$.

390. Висота прямокутної трапеції, проведена з вершини тупого кута, утворює з бічною стороною кут 30° і ділить навпіл більшу основу. Знайдіть більшу основу трапеції, якщо більша бічна сторона дорівнює m см.

391. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута, а її основи дорівнюють 10 см і 6 см. Знайдіть периметр трапеції.

392. $ABCD$ – прямокутна трапеція, $\angle D = \angle C = 90°$, AD – більша основа, $\angle BDC = 45°$, $\angle ABD = 90°$, $AD = 10$ см. Знайдіть BC і CD.

393. У рівнобічній трапеції менша основа дорівнює 5 см, бічна сторона – 3 см, а кут між бічною стороною і більшою основою дорівнює 60°. Знайдіть периметр трапеції.

394. У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює більшій основі, а бічна сторона – меншій. Знайдіть кути трапеції.

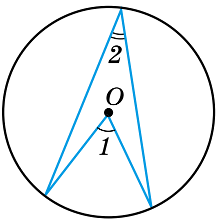
395. Побудуйте трапецію за основами і діагоналями.

396. У трапеції $ABCD$ BC – менша основа. Через точку C проведено пряму, паралельну AB, що перетинає AD у точці E. Знайдіть периметр трикутника ECD, якщо периметр трапеції дорівнює 56 см, а $BC = 10$ см.

До § 7

397. На малюнку 121 точка O – центр кола.

1) $\angle 1 = 40°$. Знайдіть $\angle 2$.
2) $\angle 2 = 25°$. Знайдіть $\angle 1$.



Мал. 121

398. На малюнку 121 точка O – центр кола. Знайдіть $\angle 2$, якщо:

1) $\angle 1 - \angle 2 = 15°$; 2) $\angle 1 + \angle 2 = 54°$.

399. Гострокутний трикутник ABC вписано в коло із центром у точці O. Знайдіть $\angle BOC$, якщо $\angle A = \alpha$.

400. У коло радіуса 2 см вписано кут ABC, що дорівнює 30°. Знайдіть довжину хорди AC.

401. Продовження бісектриси кута A трикутника ABC перетинає коло, описане навколо трикутника, у точці K. Доведіть, що $\smile BK = \smile CK$.

402. Коло поділено чотирма точками на частини, які відносяться як 1 : 2 : 3 : 4, і точки поділу сполучено між собою відрізками. Визначте кути утвореного чотирикутника.

403. Знайдіть геометричне місце точок, з яких даний відрізок MN видно під заданим кутом α.

До § 8

404. Чи можна вписати коло в чотирикутник $ABCD$, якщо:

1) $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $CD = 4$ см, $DA = 6$ см;

2) $AB = 3$ дм, $BC = 7$ дм, $CD = 8$ дм, $DA = 10$ дм?

405. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, кути якого в порядку слідування відносяться як:

1) 2 : 7 : 10 : 5; 2) 3 : 5 : 8 : 4?

406. $ABCD$ – чотирикутник, описаний навколо кола, $AB = 3$ см, $BC = 9$ см, $CD = 10$ см. Знайдіть AD.

407. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle ABC = 100°$, $\angle ADC = 80°$, $\angle BDC = 30°$. Знайдіть $\angle BAC$.

408. Три кути чотирикутника, вписаного в коло, відносяться у порядку слідування як 3 : 4 : 6. Знайдіть кути чотирикутника.

409. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло, причому AC є діаметром кола. Точка O – точка перетину діагоналей. Знайдіть $\angle AOD$, якщо $\angle BAC = 30°$; $\angle CAD = 58°$.

410. Гострий кут прямокутної трапеції, описаної навколо кола, у 5 разів менший від тупого. Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша бічна сторона дорівнює a см.

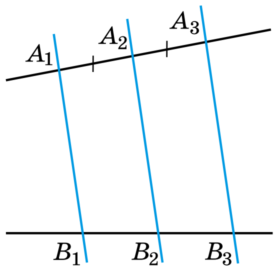
До § 9

411. На малюнку 122 прямі A_1B_1, A_2B_2 і A_3B_3 – паралельні, $A_1A_2 = A_2A_3$. Знайдіть на цьому малюнку й інші пари рівних між собою відрізків.

412. Поділіть даний відрізок на 9 рівних частин (не використовувати лінійку з поділками).

413. Поділіть даний відрізок на 3 частини, довжини яких відносяться як 3 : 1 : 2 (не використовувати лінійку з поділками).

414. Точка K ділить медіану AN трикутника ABC у відношенні 2 : 1, починаючи від точки A. Доведіть, що пряма CK ділить сторону AB навпіл.



Мал. 122

До § 10

415. Відрізок, що сполучає середини двох сторін трикутника, дорівнює 5 см. Знайдіть третю сторону трикутника.

416. Побудуйте довільний прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) і його найбільшу середню лінію.

417. EF – середня лінія трикутника ABC ($E \in AC$, $F \in BC$). $CE = 3$ см, $CF = 5$ см, $EF = 7$ см. Знайдіть периметр трикутника ABC.

418. Одна із середніх ліній рівностороннього трикутника дорівнює 2 см. Знайдіть периметр трикутника.

419. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 7 см, а периметр – 20 см. Знайдіть середню лінію, кінці якої належать бічним сторонам.

420. Точки D, E, F – відповідно середини сторін AB, BC і CA трикутника ABC. Доведіть, що чотирикутник $DEFA$ – паралелограм.

421. Сторона трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть дві інші сторони трикутника, якщо одна з його середніх ліній дорівнює 5 см, а периметр трикутника, утвореного його середніми лініями, дорівнює 18 см.

422. У трикутнику проведено середні лінії. Периметри паралелограмів, що утворилися при цьому, дорівнюють 22 см, 24 см і 26 см. Знайдіть периметр заданого трикутника і трикутника, який утворюють середні лінії.

423. Побудуйте трикутник за трьома точками – серединами його сторін.

424. Послідовно сполучили середини сторін квадрата, діагональ якого дорівнює d см. Визначте вид чотирикутника, що при цьому утворився, та обчисліть його периметр.

До § 11

425. Накресліть трапецію $ABCD$ та її середню лінію EF. Виміряйте основи трапеції та обчисліть довжину її середньої лінії.

426. Сума бічних сторін трапеції дорівнює 17 см, а середня лінія – 8 см. Знайдіть периметр трапеції.

427. Різниця основ трапеції дорівнює 2 см, а середня лінія – 14 см. Знайдіть основи трапеції.

428. Основи трапеції дорівнюють 20 см і 12 см. Бічну сторону трапеції поділено на 4 рівні частини і через точки поділу проведено прямі, паралельні основам. Знайдіть відрізки цих прямих, що містяться між сторонами трапеції.

429. Знайдіть основи трапеції, якщо її середня лінія, завдовжки 18 см, поділяється діагоналлю на відрізки, один з яких удвічі більший за другий.

430. Середня лінія трапеції втричі більша за меншу основу і на 12 см менша від більшої основи. Знайдіть основи трапеції.

431. Середня лінія трапеції діагоналями ділиться на відрізки, відношення яких дорівнює 2 : 3 : 2. Знайдіть відношення основ трапеції.

432. Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, то її висота дорівнює середній лінії.

433. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює a см, бічна сторона – c см, а гострий кут 60°. Знайдіть середню лінію трапеції.

Розділ 2. ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

У цьому розділі ви:

- **дізнаєтеся** про подібні трикутники та їх властивості; про середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику та їх властивості; про властивість бісектриси трикутника;
- **навчитеся** обґрунтовувати подібність трикутників, використовувати узагальнену теорему Фалеса та подібність трикутників до розв'язування задач.

§ 12. УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Нагадаємо, що *відношенням відрізків* AB і CD називають відношення їх довжин, тобто $\frac{AB}{CD}$.

Кажуть, що відрізки AB і CD *пропорційні відрізкам* A_1B_1 і C_1D_1, якщо

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}.$$

Наприклад, якщо $AB = 6$ см; $CD = 8$ см; $A_1B_1 = 3$ см; $C_1D_1 = 4$ см, то $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$, справді $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$.

Поняття пропорційності можна поширити і на більшу кількість відрізків. Наприклад, три відрізки AB, CD і MN пропорційні трьом відрізкам A_1B_1, C_1D_1 і M_1N_1, якщо

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{MN}{M_1N_1}.$$

Узагальнена теорема Фалеса (теорема про пропорційні відрізки). **Паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на його сторонах пропорційні відрізки.**

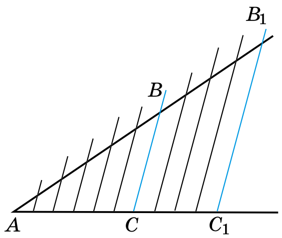
Доведення. Нехай паралельні прямі BC і B_1C_1 перетинають сторони кута A (мал. 123). Доведемо, що

$$\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}.$$

1) Розглянемо випадок, коли довжини відрізків AC і CC_1 є раціональними числами (цілими або дробовими). Тоді існує відрізок завдовжки h, який можна відкласти ціле число разів і на відрізку AC, і на відрізку CC_1.

Нехай $AC = a$, $CC_1 = b$, a і b – раціональні числа. Запишемо їх у вигляді дробу з однаковим знаменником: $AC = \frac{p}{n}$, $CC_1 = \frac{q}{n}$. Тому $h = \frac{1}{n}$. Маємо: $AC = ph$, $CC_1 = qh$.

2) Розіб'ємо відрізок AC на p рівних частин завдовжки h, а відрізок CC_1 – на q рівних частин завдовжки h. Проведемо через точки розбиття прямі, паралельні прямій BC (мал. 123). За теоремою Фалеса вони розіб'ють відрізок AB_1 на $(p + q)$ рівних відрізків завдовжки h_1, причому AB складатиметься з p таких відрізків, а BB_1 – з q таких відрізків. Маємо: $AB = ph_1$, $BB_1 = qh_1$.



Мал. 123

3) Знайдемо відношення $\frac{AB}{BB_1}$ і $\frac{AC}{CC_1}$. Матимемо:

$$\frac{AB}{BB_1} = \frac{ph_1}{qh_1} = \frac{p}{q} \quad \text{і} \quad \frac{AC}{CC_1} = \frac{ph}{qh} = \frac{p}{q}.$$

Отже, $\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}$. ▲

Враховуючи, що в пропорції середні члени можна поміняти місцями, з доведеної рівності приходимо до наступного.

Наслідок 1. $\frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{CC_1}$.

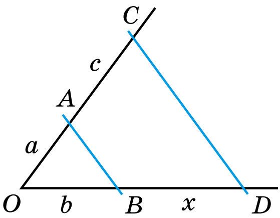
Наслідок 2. $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$.

Доведення. Оскільки $\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}$, то $\frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC}$. Додамо до обох частин цієї рівності по одиниці: $1 + \frac{BB_1}{AB} = 1 + \frac{CC_1}{AC}$, тобто $\frac{AB+BB_1}{AB} = \frac{AC+CC_1}{AC}$. Враховуючи, що $AB + BB_1 = AB_1$, $AC + CC_1 = AC_1$, матимемо: $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$. Звідки $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$. ▲

Розглянемо, як побудувати один із чотирьох відрізків, що утворюють пропорцію, якщо відомо три з них.

Задача. Дано відрізки a, b, c. Побудуйте відрізок $x = \frac{bc}{a}$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки $x = \frac{bc}{a}$, то $\frac{b}{a} = \frac{x}{c}$ і $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.



Мал. 124

Для побудови відрізка x можна використовувати як узагальнену теорему Фалеса, так і один з її наслідків. Використаємо, наприклад, наслідок 1.

1) Будуємо нерозгорнутий кут з вершиною O (мал. 124). Відкладаємо на одній з його сторін відрізок $OB = b$, а на другій – відрізки $OA = a$ і $AC = c$.

2) Проведемо пряму AB. Через точку C паралельно AB проведемо пряму, яка перетне сторону OB кута в точці D. Тому: $CD \parallel AB$.

3) За наслідком 1 з узагальненої теореми Фалеса маємо: $\frac{a}{b} = \frac{c}{BD}$, звідки $BD = \frac{bc}{a}$. Отже, $BD = x$.

Побудований відрізок x називають *четвертим пропорційним відрізків* a, b і c, оскільки справджується рівність $a : b = c : x$.

А ще раніше...

Відношення і пропорції в геометрії використовувалися з давніх-давен. Про це свідчать давньоєгипетські храми, деталі гробниці Менеса в Нечаді; піраміди у Гизі (III ст. до н. е.), персидські палаци, давньоіндійські пам'ятки тощо.

Гробниця Менеса

Піраміди у Гизі

У сьомій книзі «Начал» Евклід виклав *арифметичну* теорію вчення про відношення, яку застосував тільки до співрозмірних величин і цілих чисел. Теорія виникла на основі дій з дробами та застосовувалася для дослідження властивостей цілих чисел.

У п'ятій книзі Евклід виклав *загальну* теорію відношень і пропорцій, яку приблизно за 100 років до Евкліда розробив давньогрецький математик, механік і астроном Евдокс (408 р. до н. е. – 355 р. до н. е.). Ця теорія є основою вчення про подібність фігур, яку Евклід виклав у шостій книзі «Начал», де також було розв'язано задачу про ділення відрізка в даному відношенні.

Пропорційність відрізків прямих, які перетнуто кількома паралельними прямими, була відома ще вавилонським ученим, хоча багато істориків математики відносять це відкриття до надбань Фалеса Мілетського.

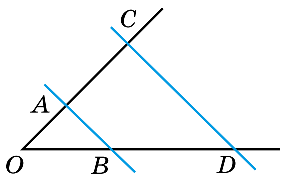
1. Що називають відношенням відрізків?
2. Сформулюйте узагальнену теорему Фалеса.
3. За якої умови відрізок x є четвертим пропорційним відрізків a, b і c?

1 Початковий рівень

434. (Усно.) На малюнку 125 $AB \parallel CD$. Які з пропорцій справджуються:

1) $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$; 2) $\frac{AC}{OA} = \frac{OB}{OD}$;

3) $\frac{AC}{OA} = \frac{OB}{BD}$; 4) $\frac{OB}{BD} = \frac{OA}{AC}$?



Мал. 125

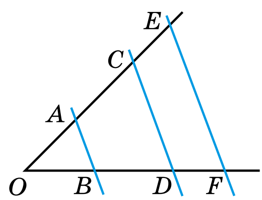
435. На малюнку 125 $AB \parallel CD$, $OA = 2$, $AC = 3$, $BD = 6$. Знайдіть OB.

436. На малюнку 125 $AB \parallel CD$, $OB = 6$, $BD = 9$, $OA = 4$. Знайдіть AC.

2 Середній рівень

437. Паралельні прямі AB, CD і EF перетинають сторони кута O (мал. 126). $AC = 6$ см, $CE = 2$ см, $BD = 5$ см. Знайдіть BF.

438. Паралельні прямі AB, CD і EF перетинають сторони кута O (мал. 126), $BD = 4$ см, $DF = 2$ см, $CE = 3$ см. Знайдіть AE.



Мал. 126

439. Паралельні прямі AB, CD і EF перетинають сторони кута з вершиною O (мал. 126). $OA = 3$ см, $AC = 4$ см, $BD = 5$ см, $DF = 2$ см. Знайдіть CE і OB.

440. Паралельні прямі AB, CD і EF перетинають сторони кута з вершиною O (мал. 126). $OB = 5$, $BD = 7$, $AC = 4$, $CE = 3$. Знайдіть OA і DF.

3 Достатній рівень

441. Дано відрізки a, b, c. Побудуйте відрізок $x = \frac{ab}{c}$.

442. Дано відрізки l, n, m. Побудуйте відрізок $x = \frac{mn}{l}$.

443. На малюнку 125 $AB \parallel CD$, $OA = 4$, $AC = 6$. Знайдіть відрізки OB і BD, якщо $OD = 15$.

444. На малюнку 125 $AB \parallel CD$, $OB = 5$, $BD = 7$. Знайдіть відрізки OA і AC, якщо $AC - OA = 1$.

4 Високий рівень

445. На стороні AB трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : MB = 1 : 3$. У якому відношенні відрізок CM ділить медіану AP трикутника ABC?

446. AD – медіана трикутника ABC, точка M лежить на стороні AC, відрізок BM ділить AD у відношенні $5 : 3$, починаючи від точки A. Знайдіть $AM : MC$.

Вправи для повторення

3 **447.** Діагональ чотирикутника дорівнює 5 см, а периметри трикутників, на які вона розбиває чотирикутник, дорівнюють 12 см і 14 см. Знайдіть периметр чотирикутника.

4 **448.** Тупий кут прямокутної трапеції дорівнює 120°, а менша діагональ трапеції дорівнює більшій бічній стороні. Знайдіть відношення середньої лінії трапеції до більшої бічної сторони.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

449. $\triangle ABC = \triangle MKL$. Заповніть пропуски:

1) $\angle A = \ldots$; 2) $\angle B = \ldots$; 3) $\angle C = \ldots$;
4) $MK = \ldots$; 5) $ML = \ldots$; 6) $KL = \ldots$.

450. Сторони одного трикутника вдвічі більші за відповідні сторони другого трикутника. У скільки разів периметр першого трикутника більший за периметр другого?

451. Дано $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$. Відомо, що $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$. Чи можна стверджувати, що

1) $\angle C = \angle C_1$; 2) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$?

Цікаві задачі для учнів неледачих

452. Дано квадрат $ABCD$. Скільки існує точок K у площині цього квадрата таких, що кожний із трикутників ABK, BCK, CDK і ADK – рівнобедрений?

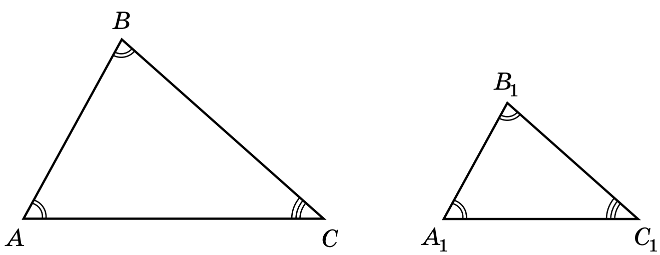
§ 13. ПОДІБНІ ТРИКУТНИКИ

У повсякденному житті трапляються предмети однакової форми, але різних розмірів, наприклад, футбольний м'яч та металева кулька, картина та її фотознімок, літак і його модель, географічні карти різного масштабу. У геометрії фігури однакової форми прийнято називати ***подібними***. Так, подібними між собою є всі квадрати, усі круги, усі відрізки.

Два *трикутники* називають *подібними*, якщо їх кути відповідно рівні і сторони одного трикутника пропорційні відповідним сторонам другого.

Це означає, що коли трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні між собою (мал. 127), то

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1 \text{ і } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$



Мал. 127

Нехай значення кожного з отриманих відношень відповідних сторін дорівнює k. Число k називають ***коефіцієнтом подібності*** трикутника ABC до трикутника $A_1B_1C_1$, або коефіцієнтом подібності трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

Подібність трикутників прийнято позначати символом $\sim$. У нашому випадку $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Зауважимо, що із співвідношення $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ слідує співвідношення $AB : BC : AC = A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1$.

Задача 1. Доведіть, що відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню відповідних сторін цих трикутників.

Доведення. Нехай $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ і $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$.

Тоді $AB = kA_1B_1$, $BC = kB_1C_1$, $AC = kA_1C_1$.

Маємо: $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} =$

$= \frac{k(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1)}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = k = \frac{AB}{A_1B_1}$.

Задача 2. Сторони трикутника ABC відносяться як $4 : 7 : 9$, а більша сторона подібного йому трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 27 см. Знайдіть інші сторони другого трикутника.

Розв'язання. Оскільки за умовою $AB : BC : AC = 4 : 7 : 9$ і $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то $A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1 = 4 : 7 : 9$. Позначимо $A_1B_1 = 4x$, $B_1C_1 = 7x$, $A_1C_1 = 9x$. За умовою $9x = 27$, тоді $x = 3$ (см). Маємо: $A_1B_1 = 4 \cdot 3 = 12$ (см), $B_1C_1 = 7 \cdot 3 = 21$ (см).

Відповідь. 12 см, 21 см.

Зауважимо, що подібні трикутники легко створювати за допомогою сучасних комп'ютерних програм, зокрема графічних редакторів. Для цього достатньо побудований трикутник розтягнути або стиснути, «потягнувши» за один з кутових маркерів.

А ще раніше...

Однакові за формою, але різні за розміром фігури використовувалися ще у вавилонських та єгипетських пам'ятках архітектури. Так, наприклад, у камері батька фараона Рамзеса II є стіна, що вкрита сіткою квадратиків, за допомогою яких на цю стіну переносили у збільшеному вигляді малюнки маленьких розмірів.

Учення про подібні фігури, яке ґрунтувалося на теорії відношень і пропорцій, було створено в Давній Греції у V–IV ст. до н. е. завдяки працям Гіпократа Хіоського, Архита Тарентського, Евдокса та інших. Узагальнив ці відомості Евклід у шостій книзі «Начал». Починається теорія подібності з наступного означення:

«Подібні прямолінійні фігури – це ті, які мають відповідно рівні кути і пропорційні сторони».

1. Наведіть з довкілля приклади предметів однакової форми.
2. Які трикутники називають подібними?
3. Що таке коефіцієнт подібності?

1 Початковий рівень

453. (Усно.) Дано: $\triangle ABC \backsim \triangle MNK$. Заповніть пропуски:
1) $\angle A = \angle \ldots$; 2) $\angle B = \angle \ldots$; 3) $\angle C = \angle \ldots$.

454. Дано: $\triangle ABC \backsim \triangle KLM$, $\frac{AB}{KL} = 2$. Заповніть пропуски:
1) $\frac{AC}{KM} = \ldots$; 2) $\frac{BC}{LM} = \ldots$.

455. Дано: $\triangle MLF \backsim \triangle PNK$. Складіть усі можливі пропорції для сторін трикутників.

2 Середній рівень

456. Дано: $\triangle MNL \backsim \triangle ABC$, $\angle M = 40°$, $\angle B = 80°$. Знайдіть невідомі кути обох трикутників.

457. Дано: $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$, $\angle A = 30°$, $\angle F = 90°$. Знайдіть невідомі кути обох трикутників.

458. Дано: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 8$ см, $A_1B_1 = 2$ см. Знайдіть:
1) $\frac{A_1C_1}{AC}$; 2) $\frac{B_1C_1}{BC}$.

459. Дано: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 10$, $BC = 8$, $CA = 6$, $A_1B_1 = 5$. Знайдіть: B_1C_1, C_1A_1.

460. Дано: $\triangle KLM \backsim \triangle K_1L_1M_1$, $KL = 12$, $KM = 9$, $LM = 21$, $K_1L_1 = 4$. Знайдіть: K_1M_1, L_1M_1.

3 Достатній рівень

461. Сторони трикутника відносяться як 7 : 8 : 9. Знайдіть невідомі сторони подібного йому трикутника, якщо його:
1) менша сторона дорівнює 21 см;
2) більша сторона на 5 см більша за середню;
3) периметр дорівнює 48 см.

462. Сторони трикутника відносяться як 5 : 6 : 9. Знайдіть невідомі сторони подібного йому трикутника, якщо його:
1) більша сторона дорівнює 18 см;
2) менша сторона на 3 см менша від середньої;
3) периметр дорівнює 100 см.

463. Доведіть, що два рівносторонніх трикутники між собою подібні.

4 Високий рівень

464. Периметри подібних трикутників відносяться як 2 : 3, а сума їх найбільших сторін дорівнює 20 см. Знайдіть сторони кожного з трикутників, якщо сторони одного з них відносяться як 2 : 3 : 4.

465. Периметри подібних трикутників відносяться як 4 : 3, а сума їх найменших сторін дорівнює 21 см. Знайдіть сторони кожного з трикутників, якщо сторони одного з них відносяться як 3 : 4 : 5.

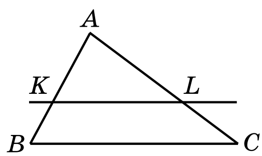
Вправи для повторення

3 **466.** У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Знайдіть усі пари рівних трикутників, що при цьому утворилися.

4 **467.** Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, належить середній лінії трапеції.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

468. На малюнку 128 пряма KL паралельна стороні BC різностороннього трикутника ABC. Знайдіть усі рівні між собою кути на цьому малюнку.



Мал. 128

Цікаві задачі для учнів неледачих

469. Точки K і L належать відповідно сторонам AB і AC трикутника ABC. Чи може точка перетину відрізків BL і KC ділити кожний з них навпіл?

§ 14. ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

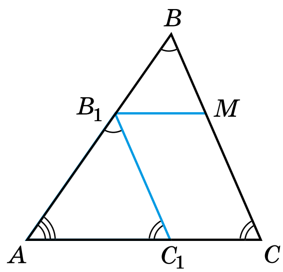
Подібність трикутників аналогічно до рівності трикутників можна встановлювати за допомогою ознак.

Перш ніж їх розглянути, сформулюємо і доведемо *лему*, тобто допоміжне твердження, яке є правильним і використовується для доведення однієї або кількох теорем.

Л е м а. **Пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному.**

Д о в е д е н н я. Нехай пряма B_1C_1 перетинає сторони AB і AC трикутника ABC відповідно у точках B_1 і C_1 (мал. 129). Доведемо, що $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$.

1) Кут A є спільним для обох трикутників, $\angle B = \angle B_1$ (як відповідні кути при паралельних прямих BC і B_1C_1 та січній AB), $\angle C = \angle C_1$ (аналогічно для січної AC). Отже, три кути трикутника ABC дорівнюють відповідним кутам трикутника AB_1C_1.



Мал. 129

2) За наслідком 2 з узагальненої теореми Фалеса маємо: $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$.

3) Доведемо, що $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AB}{AB_1}$. Проведемо через точку B_1 пряму, паралельну AC, що перетинає BC у точці M. Оскільки B_1MCC_1 – паралелограм, то $B_1C_1 = MC$. За узагальненою теоремою Фалеса: $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{BB_1}{AB_1}$. Додамо число 1 до обох частин цієї рівності. Матимемо:

$$\frac{BM}{MC} + 1 = \frac{BB_1}{AB_1} + 1; \quad \frac{BM+MC}{MC} = \frac{BB_1+AB_1}{AB_1}; \quad \frac{BC}{MC} = \frac{AB}{AB_1}.$$

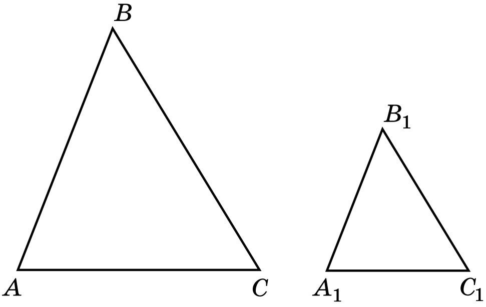
Але $MC = B_1C_1$. Отже, $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AB}{AB_1}$.

4) Остаточно маємо: $\angle A = \angle A$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ і $\frac{AB}{AB_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{AC_1}$. Отже, $\triangle ABC \backsim \triangle AB_1C_1$. ▲

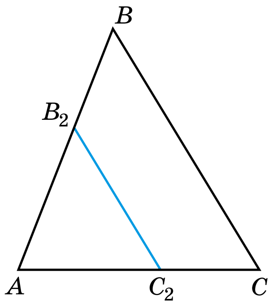
Т е о р е м а 1 (ознака подібності трикутників за двома сторонами і кутом між ними). **Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого і кути, утворені цими сторонами, між собою рівні, то трикутники подібні.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$ і $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (мал. 130). Доведемо, що $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

1) Відкладемо на стороні AB трикутника ABC відрізок $AB_2 = A_1B_1$ і проведемо через B_2 пряму, паралельну BC (мал. 131). Тоді $\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2$ (за лемою).



Мал. 130



Мал. 131

2) За наслідком 2 з узагальненої теореми Фалеса $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$. Але $AB_2 = A_1B_1$ (за побудовою). Тому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{AC_2}$. За умовою $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, отже, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AC}{AC_2}$ і звідси $A_1C_1 = AC_2$.

3) Оскільки $\angle A = \angle A_1$, $AB_2 = A_1B_1$ і $AC_2 = A_1C_1$, то $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (за двома сторонами і кутом між ними).

4) Але $\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2$, отже, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. ▲

Н а с л і д о к 1. **Прямокутні трикутники подібні, якщо катети одного з них пропорційні катетам другого.**

Н а с л і д о к 2. **Якщо кут при вершині одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при вершині другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники подібні.**

Т е о р е м а 2 (ознака подібності трикутників за двома кутами). **Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то ці трикутники подібні.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (мал. 130).

1) Виконаємо побудови, аналогічні до тих, що й у доведенні теореми 1 (мал. 131). Маємо: $\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2$.

2) $\angle AB_2C_2 = \angle B$, але $\angle B = \angle B_1$. Тому $\angle AB_2C_2 = \angle B_1$.

3) Тоді $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (за стороною і двома прилеглими кутами).

4) Отже, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. ▲

Н а с л і д о к 1. **Рівносторонні трикутники подібні.**

Н а с л і д о к 2. **Якщо кут при основі одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при основі другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники подібні.**

Н а с л і д о к 3. **Якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то ці трикутники подібні.**

Т е о р е м а 3 (ознака подібності трикутників за трьома сторонами). **Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого, то ці трикутники подібні.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ (мал. 130).

1) Виконаємо побудови, аналогічні до тих, що й у доведенні теореми 1 (мал. 131). Маємо: $\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2$.

2) Тоді $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$, але $AB_2 = A_1B_1$, тому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$. Враховуючи, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, маємо: $AC_2 = A_1C_1$, $B_2C_2 = B_1C_1$.

3) Тоді $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (за трьома сторонами).

4) Отже, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. ▲

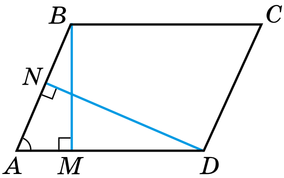
Задача 1. Сторони одного трикутника дорівнюють 9 см, 15 см і 18 см, а сторони другого трикутника відносяться як 3 : 5 : 6. Чи подібні ці трикутники?

Р о з в’ я з а н н я. Позначимо сторони другого трикутника через $3x$, $5x$ і $6x$. Оскільки $\frac{9}{3x} = \frac{15}{5x} = \frac{18}{6x} = \frac{3}{x}$, то трикутники подібні (за трьома сторонами).

В і д п о в і д ь. Так.

Задача 2. Сторони паралелограма дорівнюють 15 см і 10 см, а висота, проведена до більшої сторони, – 8 см. Знайдіть висоту, проведену до меншої сторони.

Р о з в’ я з а н н я. Нехай $ABCD$ – паралелограм (мал. 132). $AD = 15$ см, $AB = 10$ см, $BM = 8$ см – висота паралелограма. Проведемо DN – другу висоту паралелограма.



Мал. 132

$\triangle ABM \sim \triangle ADN$ (як прямокутні зі спільним гострим кутом). Тоді $\frac{AB}{AD} = \frac{BM}{DN}$, тобто $\frac{10}{15} = \frac{8}{DN}$, звідки $10 \cdot DN = 8 \cdot 15$, отже, $DN = 12$ (см).

В і д п о в і д ь. 12 см.

Сформулюйте і доведіть ознаки подібності трикутників та наслідки з них.

1 Початковий рівень

470. (Усно.) За яких умов два трикутники подібні:

1) у трикутників є спільний кут;

2) два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого;

3) дві сторони одного трикутника дорівнюють двом сторонам другого?

471. За яких умов $\triangle ABC \sim \triangle DEF$:

1) $\angle A = \angle D$;

2) $\angle A = 30°$, $\angle B = 40°$, $\angle D = 30°$, $\angle E = 40°$;

3) $AB = 2DE$, $BC = 2EF$;

4) $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$, $\angle D = 40°$, $\angle E = 90°$?

472. За яких умов $\triangle ABC \sim \triangle MNK$:

1) $AB = MN = 20$ см, $BC = NK = 10$ см;

2) $\angle A = \angle M$; $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MK}$;

3) $\angle A = 100°$, $\angle B = 30°$, $\angle M = 70°$, $\angle N = 20°$;

4) $\angle C = \angle K$, $CB = 5$, $CA = 2$, $KN = 10$, $KM = 4$?

473. Доведіть, що $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, якщо:
1) $AB = 2$, $BC = 3$, $AC = 4$, $A_1B_1 = 4$, $B_1C_1 = 6$, $A_1C_1 = 8$;
2) $\angle A = 20°$, $\angle A_1 = 20°$, $AB = 3$, $AC = 5$, $A_1B_1 = 9$, $A_1C_1 = 15$;
3) $\angle A = 30°$, $\angle B = 40°$, $\angle B_1 = 40°$, $\angle C_1 = 110°$.

474. Доведіть, що $\triangle MNK \backsim \triangle M_1N_1K_1$, якщо:
1) $\angle M = \angle M_1$, $MN = 5$, $MK = 6$, $M_1N_1 = 10$, $M_1K_1 = 12$;
2) $\angle M = 90°$, $\angle N = 50°$, $\angle K_1 = 40°$, $\angle N_1 = 50°$;
3) $MN = 3$, $NK = 4$, $MK = 5$, $M_1N_1 = 6$, $N_1K_1 = 8$, $M_1K_1 = 10$.

2 Середній рівень

475. Прямі AB і CD перетинаються в точці O, $AC \parallel BD$. Доведіть, що $\triangle AOC \backsim \triangle BOD$.

476. Прямі MN і KL перетинаються в точці O, $\angle MLO = \angle NKO$. Доведіть, що $\triangle MOL \backsim \triangle NOK$.

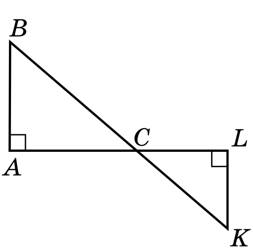
477. На сторонах AB і AC трикутника ABC відповідно позначено точки P і L так, що $AP = \frac{1}{3}AB$, $AL = \frac{1}{3}AC$. Доведіть, що $\triangle APL \backsim \triangle ABC$.

478. На сторонах KL і KN трикутника KLN відповідно позначено точки A і B так, що $KA = \frac{2}{3}KL$, $KB = \frac{2}{3}KN$. Доведіть, що $\triangle KAB \backsim \triangle KLN$.

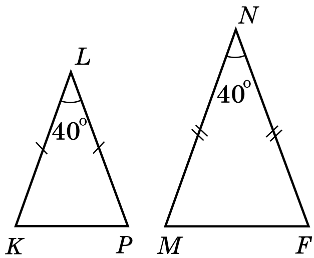
479. Чи подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:
1) $AB : BC : CA = 3 : 4 : 6$, $A_1B_1 = 6$, $B_1C_1 = 8$, $C_1A_1 = 11$;
2) $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle A_1 : \angle B_1 : \angle C_1 = 1 : 2 : 3$?

480. Чи подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:
1) $AB : BC : CA = 4 : 3 : 7$, $A_1B_1 = 8$, $B_1C_1 = 6$, $C_1A_1 = 14$;
2) $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$, $\angle A_1 = 20°$, $\angle B_1 = 50$?

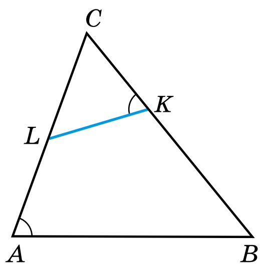
481. На малюнках 133–135 знайдіть подібні трикутники та доведіть їх подібність.



Мал. 133

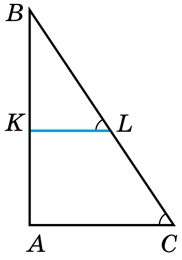


Мал. 134

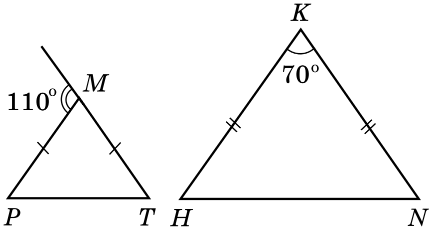


Мал. 135

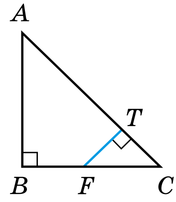
482. На малюнках 136–138 знайдіть подібні трикутники та доведіть їх подібність.



Мал. 136



Мал. 137



Мал. 138

483. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Доведіть, що $\triangle AOB \sim \triangle COD$.

484. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$, у якої $AB \parallel CD$. $AB = 10$ см, $CD = 5$ см, $OD = 4$ см. Знайдіть OB.

485. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) поділяє діагональ BD на відрізки $DO = 3$ см, $OB = 9$ см. Знайдіть AB, якщо $DC = 2$ см.

486. У трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) на катеті AC і гіпотенузі AB позначено точки M і N так, що $AM = \frac{3}{4}AC$, $AN = \frac{3}{4}AB$. Доведіть, що $\triangle AMN$ – прямокутний.

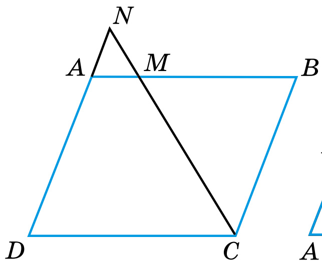
487. На катеті BC і гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначено точки P і F так, що $BP = \frac{1}{3}BC$, $BF = \frac{1}{3}BA$. Доведіть, що $PF = \frac{1}{3}CA$.

488. Кут при основі одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при основі другого рівнобедреного трикутника. Периметр першого трикутника – 36 см. Знайдіть його сторони, якщо у другого трикутника бічна сторона відноситься до основи як 5 : 2.

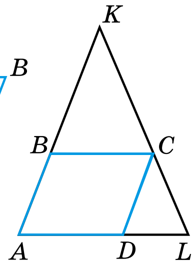
489. Дано два рівнобедрених трикутники. Кут при вершині одного з них дорівнює куту при вершині другого. Периметр першого трикутника – 30 см. Знайдіть його сторони, якщо у другого трикутника основа відноситься до бічної сторони як 1 : 2.

3 Достатній рівень

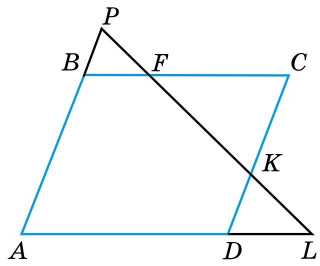
490. На малюнках 139–141 $ABCD$ – паралелограм. Знайдіть на цих малюнках усі пари подібних трикутників і доведіть їх подібність.



Мал. 139



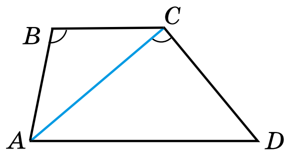
Мал. 140



Мал. 141

491. На малюнку 142 $ABCD$ – трапеція, $\angle ABC = \angle ACD$. Знайдіть подібні трикутники на цьому малюнку і доведіть, що $CA^2 = BC \cdot AD$.

492. Кути одного трикутника відносяться як 2 : 3 : 4, а один з кутів другого трикутника на 20° більший за другий і на 20° менший від третього. Чи подібні ці трикутники?



Мал. 142

493. Кути одного трикутника відносяться як 1 : 3 : 2, а другий трикутник є прямокутним, у якого один з гострих кутів дорівнює половині другого. Чи подібні ці трикутники?

494. У паралелограмі $ABCD$ точки E, F, M і N належать відповідно сторонам AB, BC, CD і DA. $\frac{EB}{BF} = \frac{DM}{DN}$. Доведіть, що $\angle BFE = \angle DNM$.

495. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, $\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC}$. Доведіть, що $\angle BCO = \angle ADO$.

496. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$), $BO = 4$ см, $DO = 7$ см. Знайдіть основи трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 22 см.

497. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$), $AD = 11$ см, $BC = 5$ см. Знайдіть відрізки BO і OD, якщо їх різниця дорівнює 3 см.

498. У трикутнику ABC $AB = 9$ см, $BC = 12$ см, $AC = 18$ см. На стороні AC відкладено відрізок $CK = 6$ см, на стороні BC – відрізок $CP = 4$ см.

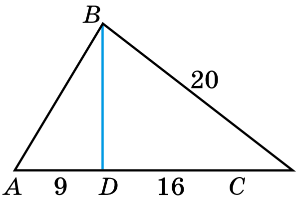
1) Чи подібні трикутники ABC і KPC?
2) Чи паралельні прямі AB і KP?
3) Знайдіть довжину відрізка PK.

499. Пряма MN паралельна стороні AB трикутника ABC, $M \in AC$, $N \in BC$. $AB = 10$ см, $MN = 4$ см, $MA = 2$ см. Знайдіть довжину сторони AC.

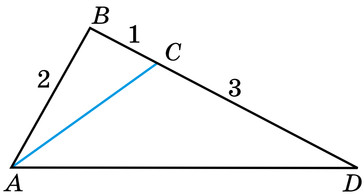
500. Пряма KL паралельна стороні BC трикутника ABC, $K \in AB$, $L \in AC$. $KB = 6$ см, $BC = 12$ см, $KL = 9$ см. Знайдіть довжину сторони AB.

501. На малюнку 143 знайдіть подібні трикутники та доведіть їх подібність.

502. На малюнку 144 знайдіть подібні трикутники та доведіть їх подібність.



Мал. 143



Мал. 144

4 Високий рівень

503. Дано два рівнобедрених трикутники. Кут при вершині одного з них дорівнює куту при вершині другого. Периметр першого трикутника дорівнює 90 см. Знайдіть його сторони, якщо сторони другого трикутника відносяться як 4 : 7. Скільки випадків слід розглянути?

504. Дано два рівнобедрених трикутники. Кут при основі одного трикутника дорівнює куту при основі другого. Сторони одного з трикутників відносяться як 5 : 8, а периметр другого дорівнює 126 см. Знайдіть сторони другого трикутника. Скільки випадків слід розглянути?

505. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, CD і C_1D_1 – бісектриси даних трикутників. Доведіть, що $\triangle ADC \sim \triangle A_1D_1C_1$.

506. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, AM і A_1M_1 – медіани даних трикутників. Доведіть, що $\triangle AMC \sim \triangle A_1M_1C_1$.

507. На стороні BC трикутника ABC позначено точку F так, що $\angle BAF = \angle C$, $BF = 4$ см, $AB = 6$ см. Знайдіть BC.

508. На стороні AC трикутника ABC позначено точку K так, що $\angle ABK = \angle C$. Знайдіть KC, якщо $AB = 2$ см, $AK = 1$ см.

509. У прямокутний трикутник ABC з катетами a см і b см і прямим кутом A вписано квадрат $AKLM$, $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in AC$. Знайдіть сторону квадрата.

510. Периметр паралелограма дорівнює 24 см, а його висоти відносяться як 5 : 3. Знайдіть сторони паралелограма.

511. Периметр паралелограма дорівнює 30 см, а його висоти – 4 см і 8 см. Знайдіть сторони паралелограма.

512. У трикутник ABC вписано ромб $AKFP$ так, що кут A у них спільний, $P \in AB$, $F \in BC$, $K \in AC$. Знайдіть сторону ромба, якщо $CK = 4$ см, $PB = 9$ см.

513. У рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 6 см, а бічна сторона – 10 см, вписано коло. Знайдіть відстань між точками дотику кола до бічних сторін.

Вправи для повторення

514. Знайдіть кути трикутника, якщо три його середні лінії рівні між собою.

515. У рівнобічній трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) E – середина AD, F – середина BC, K – середина AB. Доведіть, що $KE = KF$.

516. Кожна з бічних сторін рівнобедреного трикутника дорівнює a см. З точки, узятої на основі трикутника, проведено прямі, паралельні бічним сторонам. Обчисліть периметр паралелограма, який утворився.

517. Доведіть, що бісектриси кутів прямокутника, який не є квадратом, перетинаючись, утворюють квадрат.

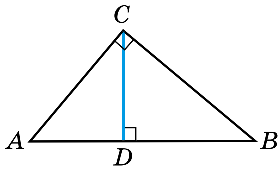
Цікаві задачі для учнів неледачих

518. Чи можуть бісектриса і медіана, що виходять з вершини прямого кута трикутника, утворювати рівнобедрений трикутник? Якщо так, то знайдіть менший з гострих кутів прямокутного трикутника.

§ 15. СЕРЕДНІ ПРОПОРЦІЙНІ ВІДРІЗКИ У ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ

Л е м а. **Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, розбиває трикутник на два подібних прямокутних трикутники, кожний з яких подібний даному трикутнику.**

Д о в е д е н н я. Нехай ABC – прямокутний трикутник ($\angle C = 90°$), CD – висота трикутника (мал. 145). Доведемо, що $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ і $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.



Мал. 145

1) У прямокутних трикутників ABC і ACD кут A – спільний. Тому $\triangle ABC \backsim \triangle ACD$ (за гострим кутом).

2) Аналогічно $\triangle ABC \backsim \triangle CBD$ ($\angle B$ – спільний, $\angle BCA = \angle BDC = 90°$). Звідки $\angle A = \angle BCD$.

3) У трикутників ACD ($\angle D = 90°$) і CBD ($\angle D = 90°$) $\angle A = \angle BCD$. Тому $\triangle ACD \backsim \triangle CBD$ (за гострим кутом). ▲

Відрізок AD називають *проекцією* катета AC на гіпотенузу AB, а відрізок BD – *проекцією* катета BC на гіпотенузу AB.

Відрізок k називають *середнім пропорційним* (або *середнім геометричним*) відрізків m і n, якщо $k^2 = m \cdot n$.

Т е о р е м а (про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику). **1) Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним проекцій катетів на гіпотенузу. 2) Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним гіпотенузи і проекції цього катета на гіпотенузу.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо малюнок 145.

1) $\triangle ACD \backsim \triangle CBD$ (за лемою). Тому $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$, або $CD^2 = AD \cdot BD$.

2) $\triangle ABC \backsim \triangle ACD$ (за лемою). Тому $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$, або $AC^2 = AB \cdot AD$.

$\triangle ABC \backsim \triangle CBD$ (за лемою). Тому $\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$, або $BC^2 = AB \cdot BD$. ▲

Задача 1. CD – висота прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C. Доведіть, що $\frac{BD}{AD} = \frac{BC^2}{AC^2}$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо малюнок 145. Оскільки $AC^2 = AB \cdot AD$, то $AB = \frac{AC^2}{AD}$, а оскільки $BC^2 = AB \cdot AD$, то $AB = \frac{BC^2}{BD}$. Тому $\frac{AC^2}{AD} = \frac{BC^2}{BD}$, звідки $\frac{BD}{AD} = \frac{BC^2}{AC^2}$.

Задача 2. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки 9 см і 16 см. Знайдіть периметр трикутника.

Р о з в' я з а н н я. Розглянемо малюнок 145, де $AD = 9$ см, $DB = 16$ см.

1) $AB = AD + DB = 9 + 16 = 25$ (см).

2) $AC^2 = AB \cdot AD$, тобто $AC^2 = 25 \cdot 9 = 225$. Оскільки $15^2 = 225$, то $AC = 15$ (см).

3) $BC^2 = AB \cdot BD$, $BC^2 = 25 \cdot 16 = 400$. Оскільки $20^2 = 400$, то $BC = 20$ (см).

4) $P_{ABC} = 25 + 15 + 20 = 60$ (см).

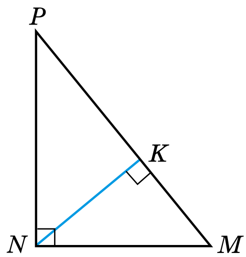
В і д п о в і д ь. 60 см.

Під час розв'язування задач цього параграфа радимо використовувати таблицю квадратів натуральних чисел (див. форзац).

1. Сформулюйте і доведіть лему із цього параграфа.
2. Який відрізок називають середнім пропорційним двох відрізків?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику.

1 Початковий рівень

519. (Усно.) На малюнку 146 NK – висота прямокутного трикутника PNM ($\angle N = 90°$). Назвіть:
1) проекцію катета NM на гіпотенузу;
2) проекцію катета NP на гіпотенузу.



Мал. 146

520. (Усно.) NK – висота прямокутного трикутника PNM (мал. 146). Які з рівностей правильні:
1) $NK = PK \cdot KM$; 2) $NM^2 = KM \cdot PM$;
3) $PN = PK \cdot KM$; 4) $PK \cdot KM = NK^2$?

521. NK – висота прямокутного трикутника PNM з прямим кутом N (мал. 146). Заповніть пропуски:
1) $NK^2 = \ldots$; 2) $NM^2 = \ldots$;
3) $PK \cdot PM = \ldots$; 4) $PK \cdot KM = \ldots$.

522. Знайдіть середнє пропорційне відрізків завдовжки:
1) 2 см і 8 см; 2) 27 дм і 3 дм.

523. Знайдіть середнє пропорційне відрізків завдовжки:
1) 16 дм і 1 дм; 2) 4 см і 9 см.

2 Середній рівень

524. Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо проекції катетів на гіпотенузу дорівнюють 9 см і 25 см.

525. Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки 2 см і 8 см.

526. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його проекція на гіпотенузу дорівнює 4 см, а гіпотенуза – 16 см.

527. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 25 см, а проекція катета на гіпотенузу – 9 см.

528. Катет прямокутного трикутника дорівнює 18 см, а його проекція на гіпотенузу – 9 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

529. Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а гіпотенуза – 9 см. Знайдіть проекцію цього катета на гіпотенузу.

530. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки 8 см і 4,5 см. Знайдіть катети трикутника.

531. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 50 см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу – 18 см. Знайдіть катети трикутника.

3 Достатній рівень

532. Перпендикуляр, проведений із середини основи рівнобедреного трикутника до бічної сторони, ділить її на відрізки 1 см і 8 см, починаючи від вершини кута при основі. Знайдіть периметр трикутника.

533. Перпендикуляр, проведений із середини основи рівнобедреного трикутника до бічної сторони, ділить її на відрізки 6 см і 2 см, починаючи від вершини, протилежної основі. Знайдіть периметр трикутника.

534. Висота, проведена з вершини прямого кута прямокутного трикутника, ділить гіпотенузу на відрізки, що відносяться як 9 : 16. Знайдіть катети трикутника, якщо його висота дорівнює 24 см.

535. Висота, проведена з вершини прямого кута прямокутного трикутника, ділить гіпотенузу на відрізки, один з яких дорівнює 16 см, а другий відноситься до висоти як 3 : 4. Знайдіть висоту трикутника.

536. Коло, вписане в ромб, точкою дотику ділить сторону ромба на відрізки 1 см і 4 см. Знайдіть радіус кола.

4 Високий рівень

537. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої 10 см і 8 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

538. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основа якої 13 см і 5 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

539. Коло, вписане у трапецію, ділить точкою дотику бічну сторону на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. Знайдіть висоту трапеції.

540. Коло, вписане у трапецію, ділить точкою дотику одну з бічних сторін на відрізки завдовжки 2 см і 8 см, а другу – на відрізки, один з яких дорівнює 4 см. Знайдіть периметр трапеції.

Вправи для повторення

2 **541.** Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника утворює зі стороною трикутника кут 18°. Знайдіть кути трикутника.

3 **542.** Про трикутники ABC і KLM відомо, що $\angle A + \angle B = \angle K + \angle L$, $\angle B + \angle C = \angle L + \angle M$. Чи подібні ці трикутники?

4 **543.** У рівнобічній трапеції діагональ ділить гострий кут навпіл. Доведіть, що тупий кут трапеції дорівнює тупому куту між діагоналями.

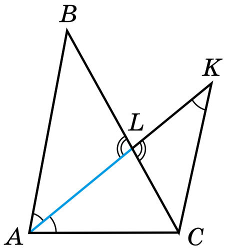
Цікаві задачі для учнів неледачих

544. (*Олімпіада Нью-Йорка, 1976 р.*) Висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці O, а на відрізках OB і OC позначено точки B_1 і C_1, для яких $\angle AB_1C = \angle AC_1B = 90°$. Доведіть, що $AB_1 = AC_1$.

§ 16. ВЛАСТИВІСТЬ БІСЕКТРИСИ ТРИКУТНИКА

Т е о р е м а (властивість бісектриси трикутника). **Бісектриса трикутника ділить сторону, до якої вона проведена, на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам.**

Д о в е д е н н я. Нехай AL – бісектриса трикутника ABC (мал. 147). Доведемо, що $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$.



Мал. 147

1) Проведемо через точку C пряму, паралельну AB, та продовжимо бісектрису AL до перетину із цією прямою в точці K. Тоді $\angle LKC = \angle BAL$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і CK та січній AK).

2) Трикутник AKC – рівнобедрений (оскільки $\angle BAL = \angle LAC$ і $\angle BAL = \angle LKC$, а тому $\angle KAC = \angle AKC$), а отже, $AC = KC$.

3) $\angle BLA = \angle CLK$ (як вертикальні). Тому $\triangle ABL \backsim \triangle KCL$ (за двома кутами). Отже, $\frac{AB}{KC} = \frac{BL}{CL}$.

Але $KC = AC$, тому $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$. ▲

З пропорції $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$ можна отримати й таку: $\frac{AB}{BL} = \frac{AC}{LC}$.

Задача 1. У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $AC = 4$ см, $BC = 9$ см, AL – бісектриса трикутника. Знайдіть BL і LC.

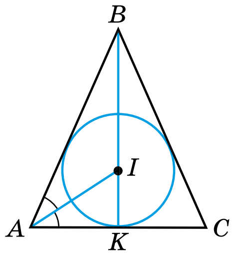
Р о з в' я з а н н я. Розглянемо $\triangle ABC$ на малюнку 147. Нехай $BL = x$ (см), тоді $LC = BC - BL = 9 - x$ (см). Оскільки $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$, маємо рівняння: $\frac{8}{4} = \frac{x}{9 - x}$, звідки $x = 6$ (см).

Отже, $BL = 6$ см, $LC = 9 - 6 = 3$ (см).

В і д п о в і д ь. 6 см, 3 см.

Задача 2. Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 24 см, а бічна сторона відноситься до основи як 3 : 2. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.

Р о з в' я з а н н я. Нехай у трикутнику ABC $AB = BC$, BK – медіана (мал. 148).



Мал. 148

Тоді BK є також висотою і бісектрисою. Оскільки точка I – центр вписаного кола – є точкою перетину бісектрис трикутника, то $I \in BK$, IK – радіус кола.

Оскільки $AB : AC = 3 : 2$, позначимо $AB = 3x$, $AC = 2x$. K – середина AC, тому $AK = \frac{AC}{2} = \frac{2x}{2} = x$.

Оскільки AI – бісектриса трикутника ABK, то $\frac{AB}{AK} = \frac{BI}{IK}$.

Нехай $IK = r$. Тоді $BI = 24 - r$. Маємо: $\frac{3x}{x} = \frac{24 - r}{r}$, звідки $r = 6$ (см).

В і д п о в і д ь. 6 см.

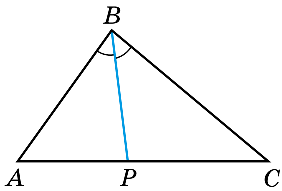
Сформулюйте й доведіть теорему про властивість бісектриси трикутника.

1 Початковий рівень

545. BP – бісектриса трикутника ABC (мал. 149). Які з рівностей є пропорціями:

1) $\frac{AB}{BC} = \frac{CP}{AP}$; 2) $\frac{BC}{AB} = \frac{CP}{AP}$;

3) $\frac{AP}{CP} = \frac{BA}{BC}$; 4) $\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PC}$?



Мал. 149

546. BP – бісектриса трикутника ABC (мал. 149). $AP : PC = 1 : 2$, $AB = 4$ см. Знайдіть BC.

547. BP – бісектриса трикутника ABC (мал. 149). $AB : BC = 1 : 2$, $AP = 7$ см. Знайдіть PC.

2 Середній рівень

548. BD – бісектриса трикутника ABC, $AD = 3$ см, $DC = 9$ см. Знайдіть відношення сторін $\frac{AB}{BC}$.

549. MA – бісектриса трикутника MNL, $ML = 4$ см, $MN = 16$ см. Знайдіть відношення відрізків $\frac{LA}{AN}$.

550. MD – бісектриса трикутника KMP, $KM = 8$ см, $MP = 6$ см. Менший з відрізків, на які бісектриса MD ділить сторону KP, дорівнює 3 см. Знайдіть KP.

551. У трикутнику ABC $AB = 6$ см, $BC = 12$ см. Більший з відрізків, на які бісектриса BK ділить сторону AC, дорівнює 6 см. Знайдіть AC.

3 Достатній рівень

552. AL – бісектриса трикутника ABC, $AB = 15$ см, $AC = 12$ см, $BC = 18$ см. Знайдіть BL і LC.

553. Бісектриса трикутника ділить сторону на відрізки, різниця довжин яких 1 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо дві інші сторони дорівнюють 8 см і 6 см.

554. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 18 см, а бісектриса ділить бічну сторону на відрізки, з яких той, що суміжний з основою, дорівнює 12 см. Знайдіть периметр трикутника.

555. У рівнобедреному трикутнику основа менша від бічної сторони на 9 см, а бісектриса ділить бічну сторону на відрізки, які відносяться як 2 : 5. Знайдіть периметр трикутника.

4 Високий рівень

556. У трикутнику, сторони якого дорівнюють 15 см, 21 см і 24 см, проведено півколо, центр якого належить більшій стороні трикутника і яке дотикається до двох інших сторін. На які відрізки центр півкола ділить більшу сторону?

557. У трикутник ABC вписано ромб $CKLM$ так, що кут C у них спільний, $K \in AC$, $L \in AB$, $M \in BC$. Знайдіть довжини відрізків AL і LB, якщо $AC = 18$ см, $BC = 12$ см, $AB = 20$ см.

Вправи для повторення

3 **558.** Чи може діагональ AC трапеції $ABCD$ ділити навпіл як кут A, так і кут C?

4 **559.** У трикутнику ABC проведено висоту CH, причому $CH^2 = AH \cdot BH$ і точка H належить стороні AB. Доведіть, що трикутник ABC – прямокутний ($\angle C = 90°$).

Цікаві задачі для учнів неледачих

560. 1) Розв'яжіть задачу та отримайте прізвище видатного українця – ученого в галузі ракетобудування та космонавтики, конструктора перших штучних супутників Землі і космічних кораблів.

Знайдіть кути A і B паралелограма $ABCD$, якщо ...	$\angle A$	$\angle B$
$\angle A$ на $20°$ більший за $\angle B$	Л	Р
$\angle A$ втричі менший від $\angle B$	К	В
$\angle A : \angle B = 7 : 5$	Ь	О

45°	75°	80°	75°	100°	105°	75°	135°

2) Поцікавтеся (використовуючи різні джерела інформації) біографією та досягненнями нашого видатного земляка.

§ 17. ЗАСТОСУВАННЯ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Розглянемо деякі цікаві властивості геометричних фігур, які легко встановити з подібності трикутників, та застосування подібності до практичних задач.

1. *Пропорційність відрізків хорд*.

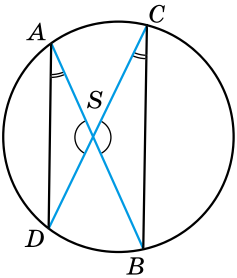
Т е о р е м а 1 (про пропорційність відрізків хорд). **Якщо хорди AB і CD перетинаються в точці S, то**

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$

Д о в е д е н н я. Нехай хорди AB і CD перетинаються в точці S (мал. 150). Розглянемо $\triangle SAD$ і $\triangle SCB$, у яких $\angle ASD = \angle CSB$ (як вертикальні), $\angle DAB = \angle DCB$ (як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу).

Тоді $\triangle SAD \sim \triangle SCB$ за двома кутами, а отже,

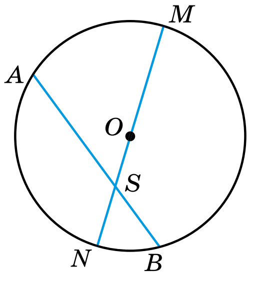
$$\frac{AS}{CS} = \frac{DS}{BS}, \text{ тобто } AS \cdot BS = CS \cdot DS. \ \blacktriangle$$



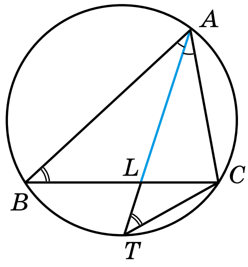
Мал. 150

Н а с л і д о к. **Якщо O – центр кола, то $AS \cdot BS = MS \cdot NS = R^2 - a^2$, де R – радіус кола, $a = SO$.**

Д о в е д е н н я. Проведемо діаметр MN, що проходить через точку S (мал. 151). Тоді $AS \cdot BS = MS \cdot NS$, $AS \cdot BS = (R + a)(R - a)$, $AS \cdot BS = R^2 - a^2$. Остаточно маємо: $AS \cdot BS = MS \cdot NS = R^2 - a^2$. ▲



Мал. 151



Мал. 152

Задача 1. AL – бісектриса трикутника ABC. Доведіть *формулу бісектриси*: $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL$.

Д о в е д е н н я. Опишемо навколо трикутника ABC коло і продовжимо AL до перетину з колом у точці T (мал. 152).

1) $\angle ABC = \angle ATC$ (як вписані кути, що опираються на одну й ту саму дугу AC), $\angle BAL = \angle CAL$ (за умовою). Тому $\triangle ABL \sim \triangle ATC$ (за двома кутами).

2) Маємо: $\dfrac{AB}{AT} = \dfrac{AL}{AC}$, звідки $AL \cdot AT = AB \cdot AC$;

$AL \cdot (AL + LT) = AB \cdot AC$; $AL^2 + AL \cdot LT = AB \cdot AC$. Але за теоремою про пропорційність відрізків хорд:

$$AL \cdot LT = BL \cdot CL.$$

3) Отже,

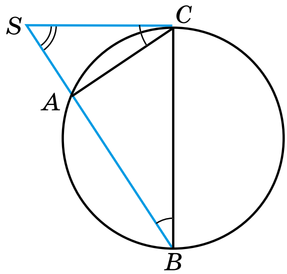
$$AL^2 + BL \cdot CL = AB \cdot AC, \text{ тобто } AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL. \ ▲$$

2. *Пропорційність відрізків січної і дотичної.*

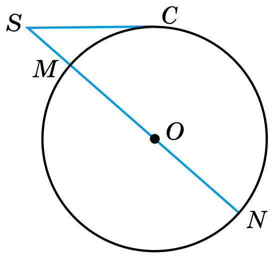
Т е о р е м а 2 (про пропорційність відрізків січної і дотичної). **Якщо з точки S, що знаходиться поза колом, провести січну, яка перетинає коло в точках A і B, та дотичну SC, де C – точка дотику, то**

$$SC^2 = SA \cdot SB.$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо мал. 153. $\angle ABC$ – вписаний, тому $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$, $\angle SCA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (див. задачу 243), тобто $\angle SCA = \angle ABC$. Тому $\triangle CSA \sim \triangle BSC$ (за двома кутами), отже, $\dfrac{SC}{SB} = \dfrac{SA}{SC}$. Звідки $SC^2 = SA \cdot SB$. ▲



Мал. 153



Мал. 154

Н а с л і д о к 1. **Якщо з точки S провести дві січні, одна з яких перетинає коло в точках A і B, а друга – у точках M і N, то $SA \cdot SB = SM \cdot SN$.**

Наслідок є очевидним, оскільки кожний з добутків $SA \cdot SB$ і $SM \cdot SN$ за теоремою дорівнює SC^2.

Н а с л і д о к 2. **Якщо O – центр кола, то $SC^2 = SA \cdot SB = a^2 - R^2$, де R – радіус кола, $a = SO$.**

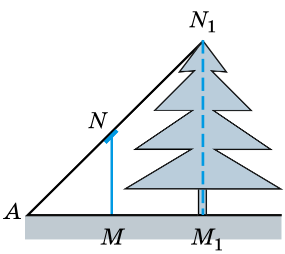
Д о в е д е н н я. Проведемо січну через центр кола – точку O (мал. 154). Тоді за теоремою:

$$SC^2 = SM \cdot SN; \quad SC^2 = (a - R)(a + R).$$

Отже, $SC^2 = a^2 - R^2$. А тому $SC^2 = SA \cdot SB = a^2 - R^2$. ▲

3. *Вимірювальні роботи на місцевості.*

Припустимо, що нам необхідно виміряти висоту деякого предмета, наприклад висоту ялини M_1N_1 (мал. 155). Для цього встановимо на деякій відстані від ялини жердину MN з планкою, що обертається навколо точки N. Спрямуємо планку на верхню точку N_1 ялини, як показано на малюнку 155. На землі позначимо точку A, у якій планка впиратиметься в поверхню землі.



Мал. 155

Розглянемо $\triangle ANM$ ($\angle M = 90°$) і $\triangle AN_1M_1$ ($\angle M_1 = 90°$). $\angle A$ – їх спільний гострий кут.

Тоді $\triangle ANM \sim \triangle AN_1M_1$ (за гострим кутом).

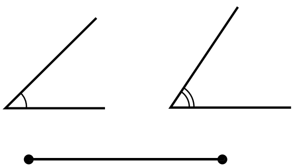
Тому $\dfrac{MN}{AM} = \dfrac{M_1N_1}{AM_1}$, звідки $M_1N_1 = \dfrac{MN \cdot AM_1}{AM}$.

Якщо, наприклад, $MN = 2$ м, $AM = 3{,}2$ м, $AM_1 = 7{,}2$ м, то $M_1N_1 = \dfrac{2 \cdot 7{,}2}{3{,}2} = 4{,}5$ (м).

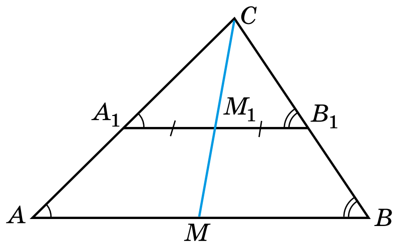
4. *Задачі на побудову.*

Задача 2. Побудуйте трикутник за двома кутами та медіаною, проведеною з вершини третього кута.

Р о з в' я з а н н я. На малюнку 156 зображено два заданих кути і заданий відрізок. Побудуємо трикутник, у якого два кути відповідно дорівнюють двом заданим кутам, а медіана, проведена з вершини третього кута, дорівнює заданому відрізку.



Мал. 156



Мал. 157

1) Будуємо деякий трикутник, подібний до шуканого. Для цього побудуємо довільний трикутник A_1B_1C, у якого кути A_1 і B_1 дорівнюють заданим (мал. 157).

2) Проводимо медіану CM_1 трикутника A_1CB_1 і відкладаємо на прямій CM_1 відрізок CM, що дорівнює заданому.

3) Через точку M проводимо пряму, паралельну A_1B_1. Вона перетинає сторони кута C у деяких точках A і B (мал. 157).

4) Оскільки $AB \parallel A_1B_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Отже, два кути трикутника ABC дорівнюють заданим.

Доведемо, що M – середина AB.

$\triangle A_1CM_1 \sim \triangle ACM$ (за двома кутами). Тому $\dfrac{CM_1}{CM} = \dfrac{A_1M_1}{AM}$.

$\triangle B_1CM \sim \triangle BCM$ (за двома кутами). Тому $\dfrac{CM_1}{CM} = \dfrac{B_1M_1}{BM}$.

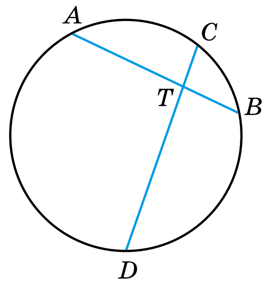
Отже, $\dfrac{A_1M_1}{AM} = \dfrac{B_1M_1}{BM}$, тобто $\dfrac{A_1M_1}{B_1M_1} = \dfrac{AM}{BM}$. Але $A_1M_1 = B_1M_1$ (за побудовою), тому $\dfrac{AM}{BM} = 1$ і $AM = BM$.

Отже, CM – медіана трикутника ABC і трикутник ABC – шуканий. ▲

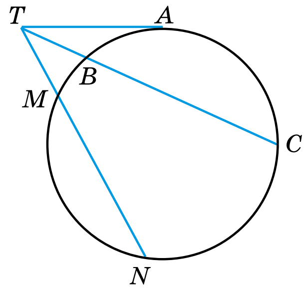
1. Сформулюйте теорему про пропорційність відрізків хорд та наслідок з неї.
2. Сформулюйте теорему про пропорційність відрізків січної і дотичної та наслідки з неї.

1 Початковий рівень

561. (Усно.) T – точка перетину хорд AB і CD (мал. 158). Які з рівностей є правильними:
1) $AT \cdot TC = BT \cdot TD$; 2) $AT \cdot TB = CT \cdot TD$;
3) $AT \cdot DT = CT \cdot BT$; 4) $CT \cdot DT = AT \cdot BT$?



Мал. 158



Мал. 159

562. (Усно.) TA – відрізок дотичної до кола. Дві січні перетинають коло відповідно в точках B і C та M і N (мал. 159). Які з рівностей є правильними:
1) $TA^2 = TB \cdot BC$; 2) $TA^2 = TM \cdot TN$;
3) $TB \cdot TC = TM \cdot MN$; 4) $TM \cdot TN = TB \cdot TC$?

2 Середній рівень

563. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці P, $AP = 9$, $PB = 2$, $DP = 4$. Знайдіть CP.

564. Хорди MN і KL кола перетинаються в точці A, $KA = 6$, $AL = 3$, $MA = 4$. Знайдіть AN.

565. SA – відрізок дотичної до кола, A – точка дотику. Січна, що проходить через точку S, перетинає коло в точках B і C, $SA = 6$ см, $SB = 4$ см. Знайдіть SC і BC.

566. MP – відрізок дотичної до кола, P – точка дотику. Січна, що проходить через точку M, перетинає коло в точках B і C. $MP = 4$ см, $MC = 8$ см. Знайдіть MB і BC.

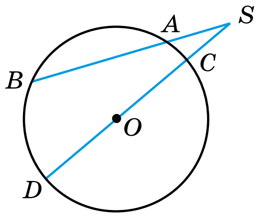
567. Хорда AB, довжина якої 16 см, перетинається з хордою CD в точці T. $AT = 2$ см, $CT = 1$ см. Знайдіть довжину хорди CD.

568. Хорда CD завдовжки 13 см, перетинає хорду MN у точці A. $CA = 4$ см, $MA = 2$ см. Знайдіть довжину хорди MN.

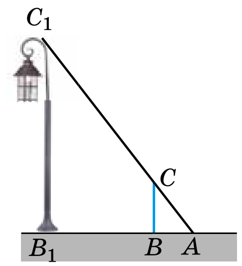
569. Січна, що проходить через точку S, перетинає коло в точках A і B, а інша січна, що проходить через точки S і центр кола O, – у точках C і D (мал. 160). $SA = 4$ см, $SB = 16$ см, $SC = 2$ см. Знайдіть радіус кола.

570. Січна, що проходить через точку S, перетинає коло в точках A і B, а друга січна, що проходить через точки S і центр кола O, – у точках C і D (мал. 160). $SA = 4$ см, $SB = 9$ см, $SC = 3$ см. Знайдіть діаметр кола.

571. Для знаходження висоти ліхтаря B_1C_1 використали жердину BC завдовжки 1,5 м (мал. 161). $AB = 1$ м, $AB_1 = 6$ м. Знайдіть висоту ліхтаря B_1C_1.



Мал. 160



Мал. 161

572. Двірник виміряв висоту ліхтаря B_1C_1, використавши жердину BC з планкою AC_1 (мал. 161). Знайдіть довжину використаної жердини BC, якщо висота ліхтаря склала 8 м і $AB_1 = 10$ м, $AB = 2,5$ м.

573. Щоб знайти на місцевості відстань від точки A до недоступної точки C, вибрали точку B, а потім на папері побудували трикутник $A_1B_1C_1$ так, що $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (мал. 162). Знайдіть AC, якщо $AB = 30$ м, $A_1B_1 = 5$ см, $A_1C_1 = 7$ см.

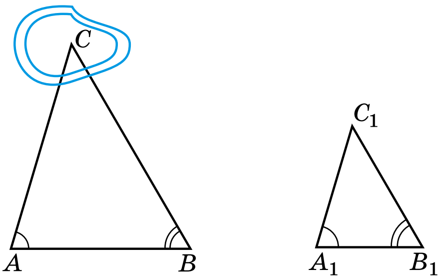
3 Достатній рівень

574. Хорди кола AB і CD перетинаються в точці E. $AE : BE = 1 : 3$, $CD = 20$ см, $DE = 5$ см. Знайдіть AB.

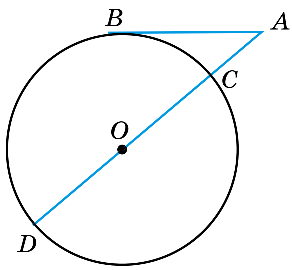
575. Через точку M, що знаходиться всередині кола, проведено дві хорди AB і CD, $AM = MB$, $CM = 16$ см, $DM : MC = 1 : 4$. Знайдіть AB.

576. На малюнку 163 AB – дотична до кола, $AB = 3$ см. Точка O – центр кола, $AO = 5$ см. Знайдіть діаметр кола.

577. На малюнку 163 AB – дотична до кола, точка O – центр кола, $AB = 8$ см, $AO = 10$ см. Знайдіть радіус кола.



Мал. 162



Мал. 163

578. Діаметр кола AB перпендикулярний до хорди CD. AB і CD перетинаються в точці M. $AM = 2$ см, $CM = 4$ см. Знайдіть радіус кола.

579. Діаметр кола MN і хорда AB – взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці P. $PB = 12$ см, $NP = 18$ см. Знайдіть діаметр кола.

4 Високий рівень

580. Перпендикуляр, проведений з точки кола до радіуса, дорівнює 24 см і ділить радіус у відношенні 5 : 8, починаючи від центра. Знайдіть радіус кола.

581. Знайдіть бісектрису AL трикутника ABC, якщо $AC = 15$ см, $AB = 12$ см, $BC = 18$ см.

582. Побудуйте трикутник за двома кутами і бісектрисою, проведеною з вершини третього кута.

583. Побудуйте трикутник за двома кутами і висотою, проведеною з вершини третього кута.

584. Побудуйте трикутник ABC за даним кутом C, відношенням сторін $AC : CB = 3 : 2$ та медіаною CM.

Вправи для повторення

585. PL – бісектриса трикутника PMN, $PN = 6$ см, $PM = 10$ см. Більший з двох відрізків, на які бісектриса PL ділить сторону MN, дорівнює 5 см. Знайдіть менший із цих відрізків.

586. Сторони трикутника відносяться як 3 : 4 : 6. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, периметр якого дорівнює 52 см.

587. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a см і b см ($a > b$). Знайдіть квадрат висоти трапеції, якщо її бічна сторона перпендикулярна до діагоналі.

Цікаві задачі для учнів неледачих

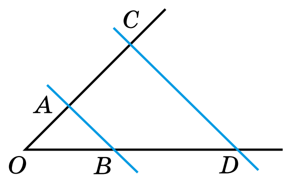
588. На продовженні найбільшої сторони AC трикутника ABC відкладено відрізок $CM = BC$. Чи може кут ABM бути: 1) гострим; 2) прямим?

Домашня самостійна робота № 3

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. Дано: $AB \parallel CD$ (мал. 164), $OA = 3$ см; $OB = 4$ см; $BD = 12$ см. Знайдіть AC.

А. 8 см; **Б.** 9 см;
В. 10 см; **Г.** 16 см.



Мал. 164

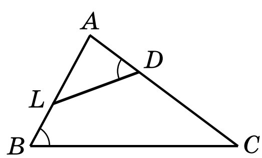
2. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$; $AB : DE = 2 : 3$. Знайдіть відношення $EF : BC$.

А. 5 : 2; **Б.** 3 : 5;
В. 2 : 3; **Г.** 3 : 2.

3. При яких з наведених умов $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$?

А. $\angle A = \angle A_1 = 30°$;
Б. $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = 40°$; $\angle B_1 = 50°$;
В. $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = 47°$; $\angle C_1 = 47°$;
Г. $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = 150°$; $\angle C_1 = 150°$.

4. На малюнку 165 ABC – різносторонній трикутник, $\angle D = \angle B$. Укажіть правильне твердження.



Мал. 165

А. $\triangle ABC \sim \triangle ADL$; **Б.** $\triangle ABC \sim \triangle ALD$;
В. $\triangle ABC \sim \triangle DAL$; **Г.** $\triangle ABC \sim \triangle DLA$.

5. CL – бісектриса трикутника ABC. $AC = 6$ см; $BC = 9$ см. Більший з відрізків, на які бісектриса CL ділить сторону AB, дорівнює 3 см. Знайдіть AB.

А. 7,5 см; **Б.** 6 см; **В.** 5 см; **Г.** 6,5 см.

6. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а його проекція на гіпотенузу – 8 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

А. 15 см; **Б.** 18 см; **В.** 16 см; **Г.** 24 см.

7. Сторони трикутника відносяться як 3 : 4 : 5. Знайдіть найменшу сторону подібного йому трикутника, якщо сума його середньої за величиною і найбільшої сторін дорівнює 72 см.

А. 18 см; **Б.** 27 см; **В.** $30\frac{6}{7}$ см; **Г.** 24 см.

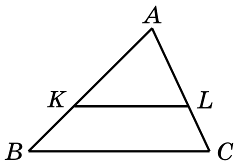
8. $ABCD$ – трапеція, AB і CD – її основи, O – точка перетину діагоналей. $AB - CD = 4$ см; $AO = 8$ см; $OC = 6$ см. Знайдіть AB.

А. 12 см; **Б.** 16 см; **В.** 14 см; **Г.** 18 см.

9. Пряма KL паралельна стороні BC трикутника ABC, $K \in AB$, $L \in AC$ (мал. 166). $BC = 9$ см; $KL = 6$ см; $KB = 4$ см. Знайдіть довжину сторони AB.

А. 12 см; **Б.** 8 см;

В. 16 см; **Г.** 10 см.



Мал. 166

10. Периметр паралелограма дорівнює 30 см, а його висоти – 4 см і 6 см. Знайдіть більшу сторону паралелограма.

А. 6 см; **Б.** 8 см; **В.** 9 см; **Г.** 12 см.

11. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Висота трапеції дорівнює 6 см і ділить більшу основу на два відрізки, менший з яких дорівнює 3 см. Знайдіть меншу основу трапеції.

А. 6 см; **Б.** 8 см; **В.** 9 см; **Г.** 12 см.

12. У трикутнику, сторони якого дорівнюють 8 см; 12 см і 15 см, проведено півколо, центр якого належить більшій стороні трикутника і яке дотикається до двох інших сторін. На які відрізки центр півкола ділить більшу сторону трикутника?

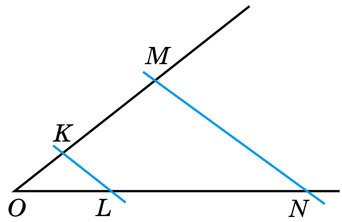
А. 6 см і 9 см; **Б.** 8 см і 7 см;

В. 7,5 см і 7,5 см; **Г.** 5 см і 10 см.

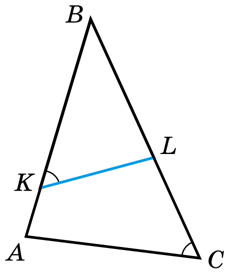
Завдання для перевірки знань до § 12–17

1. $\triangle ABC \backsim \triangle LMN$, $\frac{AB}{LM} = 3$. Знайдіть відношення $\frac{AC}{LN}$.

2. Доведіть, що $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, якщо $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 5$ см, $A_1B_1 = 6$ см, $B_1C_1 = 8$ см, $A_1C_1 = 10$ см.



Мал. 167



Мал. 168

3. Дано: $KL \parallel MN$ (мал. 167), $OL = 3$ см, $LN = 6$ см, $OK = 2$ см. Знайдіть KM.

4. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його проекція на гіпотенузу дорівнює 4 см, а гіпотенуза – 25 см.

5. AL – бісектриса трикутника ABC, $AB = 8$ см, $AC = 10$ см. Менший з відрізків, на які бісектриса AL ділить сторону BC, дорівнює 4 см. Знайдіть BC.

6. На малюнку 168 знайдіть подібні трикутники та доведіть їх подібність.

7. Сторони трикутника відносяться як 5 : 6 : 7. Знайдіть невідомі сторони подібного йому трикутника, якщо сума його більшої і меншої сторін дорівнює 24 см.

8. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AO = 6$ см, $OC = 4$ см. Знайдіть основи трапеції, якщо їх сума дорівнює 20 см.

9. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 6 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

Додаткові завдання

10. У двох рівнобедрених трикутниках кути при вершині між собою рівні. Периметр одного з трикутників дорівнює 56 см. Знайдіть його сторони, якщо дві сторони другого трикутника відносяться як 2 : 3.

11. На стороні AC трикутника ABC позначено точку K таку, що $\angle ABK = \angle C$, $AB = 8$ см, $AK = 4$ см. Знайдіть KC.

Вправи для повторення розділу 2

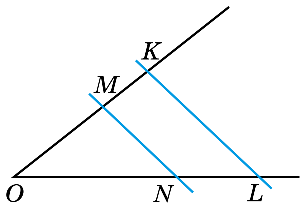
До § 12

589. На малюнку 169 $MN \parallel KL$.

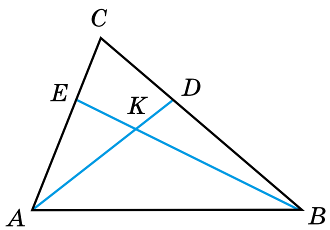
1) $OM : ON = 2 : 3$. Знайдіть $MK : NL$.

2) $OL : ON = 7 : 5$. Знайдіть $OK : OM$.

590. Паралельні прямі MN і KL перетинають сторони кута з вершиною O (мал. 169). $OM = 4$, $NL = 9$, $ON = MK$. Знайдіть довжину відрізка ON.



Мал. 169



Мал. 170

591. Дано відрізки a і b. Побудуйте відрізок $x = \dfrac{a^2}{b}$.

592. На малюнку 170 $AE : EC = 2 : 1$, $BD : DC = 3 : 2$. Знайдіть $BK : KE$.

До § 13

593. $\triangle ABC \backsim \triangle KLM$. Заповніть порожні комірки:

1) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\square}{\square}$; 2) $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\square}{\square}$.

594. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 8$ см, $BC = 6$ см, $A_1B_1 = 12$ см, $A_1C_1 = 18$ см. Знайдіть невідомі сторони обох трикутників.

595. Сторони трикутника відносяться як $2 : 5 : 6$. Знайдіть периметр трикутника, подібного даному, якщо:

1) його середня за розміром сторона дорівнює 20 см;

2) сума більшої і меншої сторін дорівнює 40 см.

596. У трикутнику проведено середню лінію. Чи подібний трикутник, що утворився, даному трикутнику?

До § 14

597. За яких умов два трикутники подібні:

1) дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого;

2) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого;

3) три кути одного трикутника дорівнюють трьом кутам другого?

598. На катеті AC і гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначено точки P і L такі, що $\angle APL = 90°$. Доведіть, що $\triangle APL \backsim \triangle ACB$.

599. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, $OB = 3OA$, $OC = 3OD$. Доведіть, що $\triangle AOD \backsim \triangle BOC$.

600. Діагоналі трапеції діляться точкою перетину у відношенні 2 : 3. Менша основа трапеції дорівнює 8 см. Знайдіть більшу основу трапеції.

601. У трикутниках KLM і $K_1L_1M_1$ $\angle K = \angle K_1$, а сторони трикутника KLM, що утворюють кут K, у 2,5 раза більші за сторони, що утворюють кут K_1. Знайдіть LM, якщо $L_1M_1 = 4$ см.

602. $ABCD$ – трапеція, $AD \parallel BC$, $\angle BAC = \angle ADC$.

1) Знайдіть подібні трикутники та доведіть їх подібність.

2) Доведіть, що $AC^2 = AD \cdot BC$.

603. На сторонах AC і BC трикутника ABC позначено точки M і N так, що $AC \cdot CM = BC \cdot CN$. Знайдіть подібні трикутники та доведіть їх подібність.

604. На стороні AC трикутника ABC вибрано точку K так, що $\angle BKC = \angle ABC$, причому $\angle BKC$ – тупий. Знайдіть BC, якщо $AK = 16$ см, $CK = 9$ см.

605. У трикутнику ABC через точку N, що належить стороні BC, проведено прямі, що перетинають сторони AB і AC відповідно в точках M і K і паралельні AC і AB. Доведіть, що $MN \cdot NK = BM \cdot CK$.

606. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, точки I і I_1 – точки перетину бісектрис даних трикутників. Доведіть, що $\triangle AIB \backsim \triangle A_1I_1B_1$.

607. У трикутник ABC вписано прямокутник $KLMN$, у якого $KN = 16$ см, $LK = 10$ см. Причому $K \in AC$, $N \in AC$, $M \in BC$, $L \in AB$. Знайдіть висоту трикутника, проведену з вершини B, якщо $AC = 24$ см.

608. BD і AE – висоти гострокутного трикутника ABC. Доведіть, що $DC \cdot AC = EC \cdot BC$.

До § 15

609. Накресліть прямокутний трикутник KLM ($\angle K = 90°$) та проведіть у ньому висоту KP. Які відрізки є проекціями катетів KL і KM на гіпотенузу?

610. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки 1 см і 8 см. Знайдіть менший катет трикутника.

611. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює 24 см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу – 18 см. Знайдіть проекцію другого катета на гіпотенузу та катети трикутника.

612. BM – бісектриса рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$). З точки M до BC проведено перпендикуляр MK. Знайдіть BM і периметр трикутника, якщо $KC = 9$ см, $MK = 12$ см.

613. Перпендикуляр, проведений з вершини кута прямокутника до діагоналі, ділить її на відрізки, довжини яких відносяться як 9 : 16. Знайдіть периметр прямокутника, якщо довжина перпендикуляра 12 см.

614. Коло, вписане в ромб, точкою дотику ділить сторону ромба на відрізки 3,6 см і 6,4 см. Знайдіть діагоналі ромба.

615. У рівнобічній трапеції діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Висота трапеції дорівнює 6 см, а середня лінія – 9 см. Знайдіть основи трапеції.

До § 16

616. BM – бісектриса трикутника ABC. Знайдіть відношення $\frac{AM}{MC}$, якщо $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$.

617. BD – бісектриса трикутника ABC. Знайдіть сторону AB, якщо $AD : DC = 3 : 5$, $BC = 20$ см.

618. Одна зі сторін паралелограма на 9 см більша за другу. Бісектриса кута паралелограма ділить діагональ паралелограма на відрізки 4 см і 10 см. Знайдіть периметр паралелограма.

619. Периметр прямокутника 60 см. Бісектриса, що виходить з вершини кута прямокутника, ділить його діагональ на відрізки, що відносяться як 7 : 8. Знайдіть сторони прямокутника.

620. Точка D належить стороні AB трикутника ABC. Порівняйте кути ACD і BCD, якщо $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, $AD = 3$ см, $DB = 7$ см.

621. У рівнобедреному трикутнику радіус вписаного кола в 5 разів менший від висоти, проведеної до основи. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 90 см.

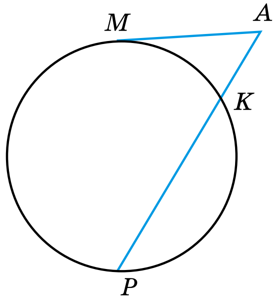
До § 17

622. S – точка перетину хорд AB і CD. $AS = 4$, $SB = 1$. Якому числу дорівнює добуток $CS \cdot DS$?

623. Січні a і b виходять з точки M, що лежить поза колом. Січна a перетинає коло в точках A і B, а січна b – у точках C і D. Відомо, що $MA \cdot MB = 28$, $MC = 4$. Знайдіть MD і CD.

624. З точки A до кола проведено дотичну AM та січну AP (мал. 171). Знайдіть довжини відрізків AK і PK, якщо $AM = 8$ см, $AP = 16$ см.

625. З точки A до кола проведено дотичну AM та січну, яка перетинає коло в точках K і P (мал. 171). $AM = 10$ см, $AP : AK = 4 : 1$. Знайдіть AK, AP та KP.



Мал. 171

626. Продовження медіани AM рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) перетинає коло, описане навколо трикутника, у точці P. $AM = 6$ см, $BC = 8$ см. Знайдіть AP.

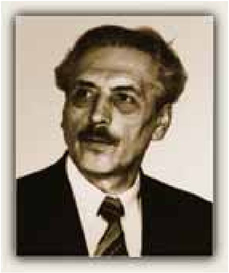
627. У трикутнику ABC з вершини B проведено бісектрису BL. Відомо, що $BL = 5$ см, $AL = 4$ см, $LC = 5$ см. Знайдіть AB і BC.

628. Побудуйте трикутник ABC за даним кутом A, відношенням сторін $AC : AB = 4 : 3$ і бісектрисою AL.

Найвеличніший геометр XX століття

На початку 80-х років XX століття Американське математичне товариство видало багатотомник «Видатні математики XX століття». Четвертий його том було присвячено монографії «Проблема Монжа–Ампера» – праці Олексія Васильовича Погорєлова. В анотації на суперобкладинці цього тому Погорєлова було названо «найвеличнішим геометром XX століття».

Саме так було оцінено внесок нашого видатного земляка в розвиток геометрії, однієї з найдавніших наук на Землі.



Народився Олексій Погорєлов 3 березня 1919 року в маленькому місті Короча Білгородської губернії (Росія). У 1929 році сім'я Погорєлових переїжджає до Харкова. Батьки маленького Олексія працювали спочатку на будівництві Харківського тракторного заводу, а потім на цьому заводі. Родина Погорєлових протягом довгого часу мешкала у крихітній, відгородженій від сусідів клітинці бараку. Ліжок на всіх у родині бракувало, і батькові доводилося спеціально працювати в нічну зміну, щоб його діти могли виспатися в нормальних умовах. Незважаючи на складні умови проживання, Олексій добре навчався у школі з усіх предметів, але найбільше його цікавила математика. Уже згодом на одному з ювілеїв шкільні друзі згадували, що ще у школі однокласники дали йому прізвисько Паскаль.

У 1935 році в Києві було започатковано проведення математичних олімпіад[1], а у 1937 році харківський десятикласник Олексій Погорєлов став її переможцем та був запрошений на навчання до Харківського державного університету (нині – Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна). Отже, він став студентом математичного відділення вказаного вишу. Олексій був дуже обдарованим студентом, про що свідчить той факт, що у 1943–1944 рр. під час Другої світової війни його було направлено на навчання до Військово-повітряної академії ім. Жуковського – в один із найелітніших військово-навчальних і наукових центрів СРСР. Після стажування в діючій армії та закінчення академії у 1945 році Олексія Погорєлова направляють на конструкторську роботу у відомий Центральний аерогідродинамічний інститут (ЦАГІ) у Москві. У той же час Олексій Васильович заочно навчається в аспірантурі Математичного інституту Московського держав-

[1] Розповідь про становлення і розвиток українського математичного олімпіадного руху можна знайти в підручнику «Алгебра. 7 клас» (автор – О.С. Істер, видавництво «Генеза», 2015 р., с. 43–45).

ного університету. Саме в ці роки класичний математик-геометр Погорєлов сформувався і як інженер-конструктор, що має справу з конкретною технікою. У 1947 році Погорєлов починає викладацьку діяльність у Харківському університеті. У 1950 році йому було присвоєно звання професора. Із цього часу і протягом наступних двадцяти років його діяльність відзначалася багатьма державними і міжнародними преміями, він обирався членом-кореспондентом, а потім і дійсним членом Академії наук УРСР, а у 1976 році став академіком АН СРСР.

У 1960 році в Харкові було створено Фізико-технічний інститут низьких температур (ФТІНТ), і Погорєлов очолив там відділ геометрії. В інституті він пропрацював 40 років та створив новий напрям у механіці та геометрії – геометричну теорію стійкості тонких пружних оболонок, пошук якої розпочав ще академік О.Д. Александров, видатний російський математик, якого Погорєлов уважав своїм наставником у науці. Ця теорія підтвердилася під час досліджень, проведених у ФТІНТі. Інженерний талант класичного математика знайшов своє відображення у двох впроваджених авторських свідоцтвах, співпраці з машинобудівниками під час створення унікальних кріотурбогенераторів та надпровідних двигунів. А скільки оригінальних технічних ідей Погорєлова не було доведено до впровадження й офіційного визнання, оскільки це потребувало чималого клопоту та зусиль! Серед цих винаходів – безінерційна спінінгова котушка, незвичний плуг, двигун внутрішнього згоряння принципово нової схеми.

Але головною справою його життя, безперечно, була чиста математика, геометрія. Цілу бібліотеку – близько 40 монографій, перекладених мовами багатьох народів світу, залишив нам у спадок Олексій Васильович. Серед них є й ті, які зрозуміє лише невелике коло фахівців, а є й підручники з геометрії, написані для десятків тисяч студентів-математиків. Але найвідомішим і найвизначнішим для класичної математики став його підручник з геометрії для середньої загальноосвітньої школи, перше видання якого відбулося в 1972 році і за яким протягом майже 30 років навчалися десятки мільйонів школярів СРСР та ще кілька років поспіль українські школярі після здобуття Україною незалежності.

Помер Олексій Васильович Погорєлов у грудні 2002 року.

Нашому видатному земляку вдалося розв’язати задачі, які було сформульовано найвидатнішими математиками XIX і початку XX століття: Коші, Дарбу, Гільбертом, Вейлем, Мінковським, Кон-Фессетом і Бернштейном.

Розділ 3 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** основні властивості прямокутних трикутників;
- **дізнаєтеся** про теорему Піфагора; синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника; властивості похилих та їх проекцій;
- **навчитеся** знаходити співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника, розв'язувати прямокутні трикутники.

§ 18. *ТЕОРЕМА ПІФАГОРА*

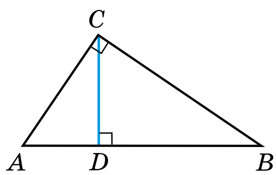
Розглянемо одну з найважливіших теорем геометрії, яка встановлює залежність між катетами та гіпотенузою прямокутного трикутника.

Теорема 1 (теорема Піфагора). **У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.**

На сьогоднішній день відомо більше ніж сто доведень цієї теореми. Розглянемо одне з них.

Доведення. Нехай ABC – довільний прямокутний трикутник, у якого $\angle C = 90°$ (мал. 172). Доведемо, що

$$\boldsymbol{AB^2 = AC^2 + BC^2}.$$



Мал. 172

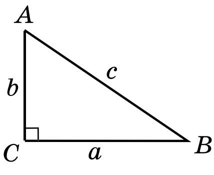
1) Проведемо висоту CD.

2) За теоремою про середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику маємо: $AC^2 = AB \cdot AD$, $BC^2 = AB \cdot BD$.

3) Додамо почленно ці дві рівності. Матимемо:
$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot BD = AB \cdot (AD + BD) = AB \cdot AB = AB^2$.

4) Отже,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2. \blacktriangle$$



Мал. 173

Якщо позначити у $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (мал. 173), то теорему Піфагора можна записати формулою:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

За допомогою теореми Піфагора, знаючи дві сторони прямокутного трикутника, можна знайти третю.

У цьому нам допоможе така схема:

$c^2 = a^2 + b^2$

$a^2 = c^2 - b^2$ — $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$b^2 = c^2 - a^2$ — $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Задача 1. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 24 см. Знайдіть гіпотенузу.

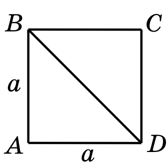
Р о з в' я з а н н я. Нехай $a = 7$ см, $b = 24$ см, тоді $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$ (см).

В і д п о в і д ь. 25 см.

Задача 2. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 17 см, а один з катетів – 15 см. Знайдіть другий катет.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $a = 15$ см, $c = 17$ см, тоді $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{(17-15)(17+15)} = \sqrt{2 \cdot 32} =$
$= \sqrt{64} = 8$ (см).

В і д п о в і д ь. 8 см.



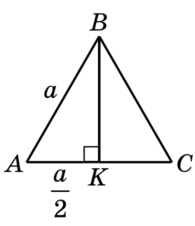
Мал. 174

Задача 3. Знайдіть діагональ квадрата, сторона якого дорівнює a.

Р о з в' я з а н н я. Розглянемо квадрат $ABCD$, у якого $AB = AD = a$ (мал. 174). Тоді

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

В і д п о в і д ь. $a\sqrt{2}$.



Мал. 175

Задача 4. Знайдіть медіану рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює a.

Р о з в' я з а н н я. Розглянемо рівносторонній трикутник зі стороною a, BK – медіана цього трикутника (мал. 175).

Оскільки BK – медіана рівностороннього трикутника, то вона є також і висотою.

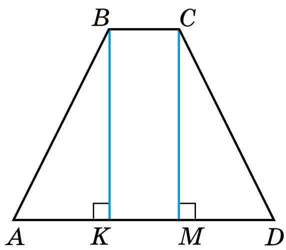
У $\triangle ABK$: $\angle K = 90°$, $AB = a$, $AK = \frac{a}{2}$. Тоді

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

В і д п о в і д ь. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Задача 5. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 22 см, а бічна сторона – 13 см. Знайдіть висоту трапеції.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $ABCD$ – дана трапеція, $AD \parallel BC$, $AD = 22$ см, $BC = 12$ см, $AB = CD = 13$ см (мал. 176).



Мал. 176

1) Проведемо висоти BK і CM.

2) $\triangle ABK = \triangle DCM$ (за катетом і гіпотенузою), тому

$$AK = MD = \frac{AD - KM}{2} = \frac{AD - BC}{2} = \frac{22 - 12}{2} = 5 \text{ (см)}.$$

3) Із $\triangle ABK$ за теоремою Піфагора маємо:

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см)}.$$

В і д п о в і д ь. 12 см.

Задача 6. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а другий на 2 см менший від гіпотенузи. Знайдіть невідомий катет трикутника.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $a = 8$ см і $b = x$ см – катети трикутника, тоді $c = (x + 2)$ см – його гіпотенуза.

Оскільки за теоремою Піфагора $c^2 = a^2 + b^2$, маємо рівняння: $(x + 2)^2 = 8^2 + x^2$, звідки $x = 15$ (см).

Отже, невідомий катет дорівнює 15 см.

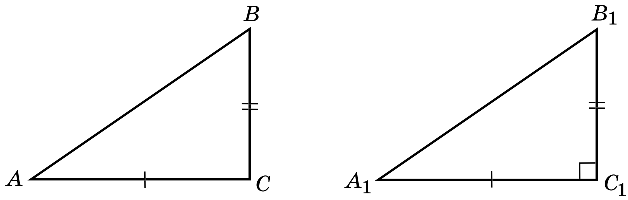
В і д п о в і д ь. 15 см.

Справджується і твердження, обернене до теореми Піфагора.

Т е о р е м а 2 (обернена до теореми Піфагора). **Якщо у трикутнику ABC має місце рівність $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то кут C цього трикутника – прямий.**

Д о в е д е н н я. Нехай у трикутнику ABC $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Доведемо, що $\angle C = 90°$ (мал. 177).

Розглянемо $\triangle A_1B_1C_1$, у якого $\angle C_1 = 90°$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$. Тоді за теоремою Піфагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$,



Мал. 177

а отже, $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$.

Але за умовою $AC^2 + BC^2 = AB^2$, тому $A_1B_1^2 = AB^2$, тобто $A_1B_1 = AB$.

Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за трьома сторонами), звідки $\angle C = \angle C_1 = 90°$. ▲

Оскільки $5^2 = 3^2 + 4^2$, то трикутник зі сторонами 3, 4 і 5 є прямокутним. Такий трикутник часто називають *єгипетським*, оскільки про те, що він прямокутний, було відомо ще давнім єгиптянам.

Трійку цілих чисел, що задовольняє теорему Піфагора, називають *піфагоровою трійкою чисел*, а трикутник, для якого вона є довжинами сторін, – *піфагоровим трикутником*. Наприклад, піфагоровою є не тільки трійка чисел 3, 4, 5, а й 7, 24, 25 або 9, 40, 41 тощо.

Зауважимо, що з теореми Піфагора та теореми, оберненої до неї, слідує, що

трикутник є прямокутним тоді і тільки тоді, коли квадрат найбільшої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін.

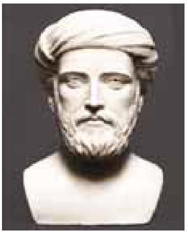
Задача 7. Чи є прямокутним трикутник зі сторонами:
1) 6; 8; 10; 2) 5; 7; 9?

Р о з в' я з а н н я. 1) Оскільки $10^2 = 6^2 + 8^2$ (100 = 100), то трикутник є прямокутним. 2) Оскільки $9^2 \neq 5^2 + 7^2$ ($81 \neq 74$), то трикутник не є прямокутним.

В і д п о в і д ь. 1) Так; 2) ні.

А ще раніше...

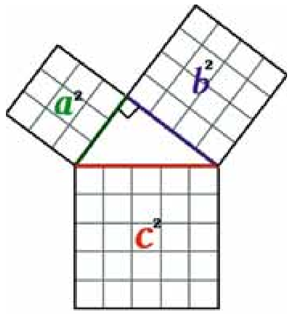
Теорема, яку названо на честь давньогрецького філософа і математика *Піфагора*, була відома задовго до нього. У текстах давніх вавилонян про неї згадувалося ще за 1200 років до Піфагора. Скоріш за все, доводити цю тео-



Піфагор
(бл. 580–500 до н.е.)

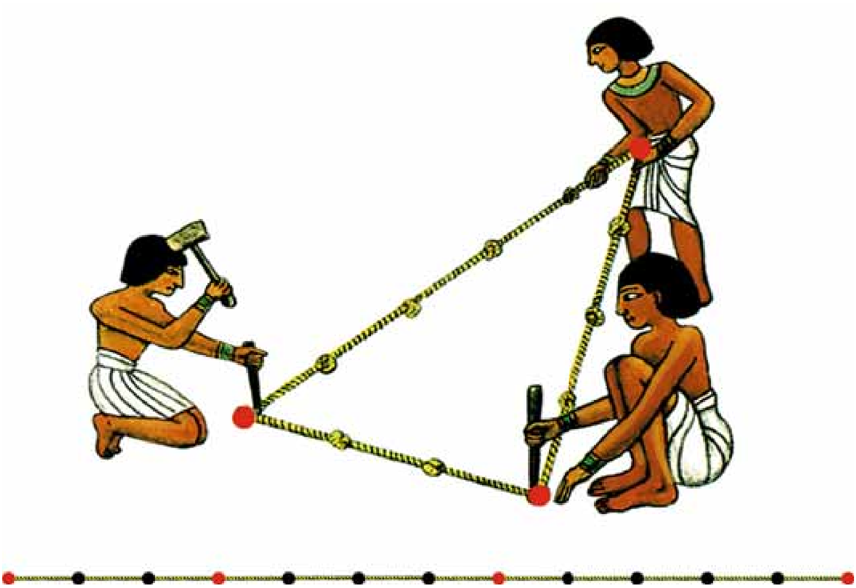
рему вавилоняни не вміли, а залежність між катетами та гіпотенузою прямокутного трикутника встановили дослідним шляхом. Також ця теорема була відома у Стародавньому Єгипті та Китаї.

Вважають, що Піфагор – перший, хто запропонував строге доведення теореми. Формулювання в Піфагора було таким: «Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах». Саме в такому формулюванні теорему і було доведено Піфагором.



Малюнок до цього доведення ще називають «піфагоровими штанями».

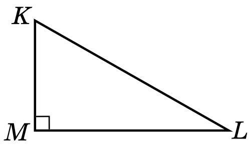
Знаючи, що трикутник зі сторонами 3, 4 і 5 є прямокутним, землеміри Стародавнього Єгипту використовували його для побудови прямого кута. Мотузку ділили вузлами на 12 рівних частин, а її кінці з’єднували. Потім за допомогою кілків мотузку розтягували на землі у вигляді трикутника зі сторонами 3; 4; 5. Тоді кут, що лежав проти сторони, що дорівнювала 5, був прямим.



1. Сформулюйте і доведіть теорему Піфагора.
2. Сформулюйте теорему, обернену до теореми Піфагора.
3. Який трикутник називають єгипетським?
4. Які трійки чисел і трикутники називають піфагоровими?

1 Початковий рівень

629. (Усно.) $\triangle MKL$ – прямокутний, $\angle M = 90°$ (мал. 178). Які з рівностей правильні:



Мал. 178

1) $KM^2 = ML^2 - KL^2$;
2) $KL^2 = ML^2 + KM^2$;
3) $ML^2 = KL^2 + KM^2$;
4) $KM^2 = KL^2 - ML^2$;
5) $KL^2 = ML^2 - KM^2$;
6) $ML^2 = KL^2 - KM^2$?

630. $\triangle EFP$ – прямокутний, $\angle P = 90°$. Заповніть пропуски:
1) $EF^2 = \ldots^2 + \ldots^2$; 2) $EP^2 = \ldots^2 - \ldots^2$.

631. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють:
1) 6 см і 8 см; 2) 12 см і 35 см.

632. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють:
1) 5 см і 12 см; 2) 8 см і 15 см.

633. Знайдіть невідомий катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза і другий катет відповідно дорівнюють:
1) 17 см і 8 см; 2) 26 см і 10 см.

634. Знайдіть невідомий катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза і другий катет відповідно дорівнюють:
1) 25 см і 7 см; 2) 41 см і 40 см.

2 Середній рівень

635. Дві більші сторони прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 5 см. Знайдіть його найменшу сторону.

636. Дві менші сторони прямокутного трикутника дорівнюють 2 см і 3 см. Знайдіть його найбільшу сторону.

637. Сторони прямокутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть його діагональ.

638. Діагональ прямокутника дорівнює 13 см, а одна з його сторін – 12 см. Знайдіть другу сторону прямокутника.

639. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 15 см, а висота, проведена до основи, – 12 см. Знайдіть основу трикутника.

640. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см, а висота, проведена до основи, – 15 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

641. Діагоналі ромба дорівнюють 24 см і 70 см. Знайдіть сторону ромба.

642. Сторона ромба дорівнює 13 см, а одна з діагоналей – 10 см. Знайдіть другу діагональ ромба.

643. Діагональ квадрата дорівнює $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть його сторону.

644. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 8 см. Знайдіть довжину медіани, проведеної до більшого катета.

645. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 9 см. Знайдіть довжину медіани, проведеної до меншого катета.

646. З точки A до кола із центром O проведено дотичну, B – точка дотику. Знайдіть довжину відрізка AO, якщо $OB = 2$ см, $AB = 7$ см.

647. З точки M до кола із центром O проведено дотичну, P – точка дотику. Знайдіть довжину відрізка PM, якщо $OP = 3$ см, $OM = 6$ см.

648. Чи є прямокутним трикутник зі сторонами:
1) 15; 20; 25; 2) 4; 5; 6?

649. Чи є прямокутним трикутник зі сторонами:
1) 5; 6; 9; 2) 16; 30; 34?

650. У колі, радіус якого дорівнює 13 см, проведено хорду, завдовжки 10 см. Знайдіть відстань від центра кола до даної хорди.

651. У колі проведено хорду завдовжки 16 см. Знайдіть радіус кола, якщо відстань від центра кола до хорди дорівнює 6 см.

3 Достатній рівень

652. Дві сторони прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 6 см. Знайдіть третю сторону (розгляньте всі випадки).

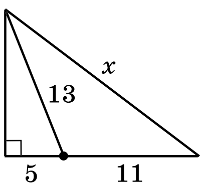
653. Дві сторони прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 2 см. Знайдіть третю сторону (розгляньте всі випадки).

654. Катети прямокутного трикутника відносяться як 7 : 24, а гіпотенуза дорівнює 50 см. Знайдіть периметр трикутника.

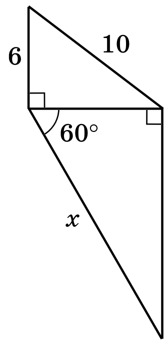
655. Катет відноситься до гіпотенузи як 8 : 17. Знайдіть периметр трикутника, якщо другий катет дорівнює 30 см.

656. Знайдіть довжину невідомого відрізка x на малюнках 179–182.

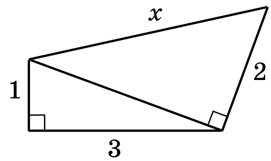
657. Знайдіть довжину невідомого відрізка x на малюнках 183 і 184.



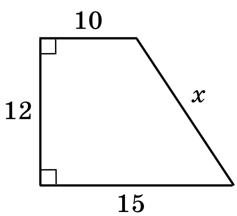
Мал. 179



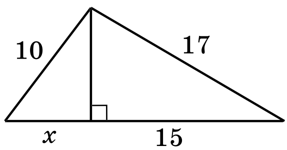
Мал. 180



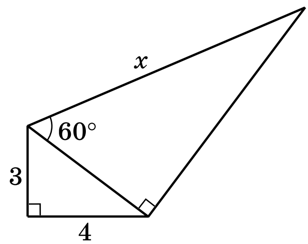
Мал. 181



Мал. 182



Мал. 183



Мал. 184

658. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а другий на 2 см менший від гіпотенузи. Знайдіть периметр трикутника.

659. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 5 см, а гіпотенуза на 1 см більша за другий катет. Знайдіть периметр трикутника.

660. У трикутнику ABC кут A тупий, $BC = 39$ см, $AB = 17$ см. BK – висота трикутника, $BK = 15$ см. Знайдіть AC.

661. BK – висота трикутника ABC, у якого $\angle C$ – тупий. $AB = 20$ см, $BC = 13$ см, $CK = 5$ см. Знайдіть AC.

662. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 5 см і поділяє її на два відрізки так, що прилеглий до вершини рівнобедреного трикутника відрізок дорівнює 12 см. Знайдіть основу трикутника.

663. Висота BK рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) ділить сторону AC на відрізки $AK = 24$ см і $KC = 1$ см. Знайдіть основу трикутника.

4 Високий рівень

664. Знайдіть сторони паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 8 см і 10 см і одна з них перпендикулярна до сторони.

665. Радіус кола, описаного навколо тупокутного рівнобедреного трикутника, дорівнює 37 см, а його основа – 70 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

666. Висота рівнобедреного гострокутного трикутника, проведена до основи, дорівнює 18 см, а радіус кола, описаного навколо нього, – 13 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

667. Побудуйте відрізок, довжина якого дорівнює $\sqrt{13}$ см.

668. Побудуйте відрізок, довжина якого дорівнює $\sqrt{10}$ см.

669. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки завдовжки 10 см і 26 см. Знайдіть периметр трикутника.

670. Бісектриса прямого кута трикутника ділить гіпотенузу на відрізки, що дорівнюють 15 см і 20 см. Знайдіть периметр трикутника.

671. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить катет на відрізки 2 см і 10 см. Знайдіть периметр трикутника.

672. Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні і дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

673. Рівнобічну трапецію з основами a і b описано навколо кола. Доведіть, що її висота дорівнює $\sqrt{ab}$.

674. Відношення бічної сторони до основи рівнобедреного трикутника дорівнює 5 : 8, а різниця відрізків, на які бісектриса кута при основі ділить висоту, проведену до основи, дорівнює 3 см. Знайдіть периметр трикутника.

675. Бічна сторона рівнобедреного трикутника на 5 см менша від основи. Відрізки, на які бісектриса кута при основі ділить висоту, проведену до основи, відносяться як 5 : 3. Знайдіть периметр трикутника.

Вправи для повторення

676. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°. Знайдіть медіану цього трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо сума гіпотенузи і меншого катета дорівнює 18 см.

677. Коло радіуса 3 см вписано в ромб. Один з відрізків, на які точка дотику ділить сторону ромба, дорівнює 9 см. Знайдіть периметр ромба.

678. Трапецію вписано в коло так, що діаметр кола є її більшою основою, а відношення основ дорівнює 2 : 1. Знайдіть кути трапеції.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

679. Побудуйте пряму m та точку A на відстані 2 см від прямої m і точку B на відстані 3 см від прямої m.

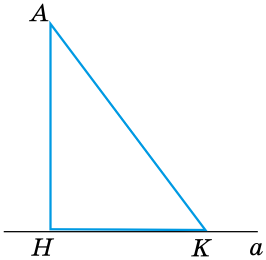
680. Побудуйте пряму a та позначте точку B, яка їй не належить. 1) Побудуйте перпендикуляр BK до прямої a.
2) Побудуйте відрізок BM, де M – деяка точка прямої a.
3) Порівняйте довжини відрізків BK і BM.

681. Побудуйте паралельні прямі, відстань між якими дорівнює 2 см.

Цікаві задачі для учнів неледачих

682. Чи можна розмістити на площині 6 точок так, щоб будь-які три з них були вершинами рівнобедреного трикутника?

§ 19. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ



Мал. 185

Нехай AH – ***перпендикуляр***, проведений з точки A до прямої a (мал. 185). Точку H називають ***основою перпендикуляра*** AH. Нехай K – довільна точка прямої a, відмінна від H. Відрізок AK називають ***похилою***, проведеною з точки A до прямої a, а точку K – ***основою похилої***. Відрізок HK називають ***проекцією похилої AK на пряму a***.

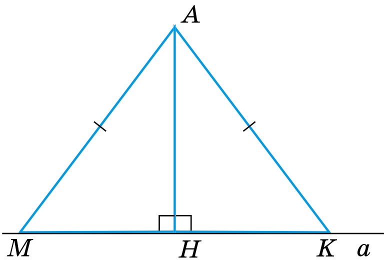
Розглянемо *властивості перпендикуляра і похилої*.

1. Перпендикуляр, проведений з точки до прямої, менший від будь-якої похилої, проведеної із цієї точки до цієї прямої.

Дійсно, у прямокутному трикутнику AHK AH – катет, AK – гіпотенуза (мал. 185). Тому $AH < AK$.

2. Якщо дві похилі, проведені з точки до прямої, між собою рівні, то рівні між собою і їх проекції.

Нехай з точки A до прямої a проведено похилі AK і AM ($AK = AM$) і перпендикуляр AH (мал. 186). Тоді $\triangle AHK = \triangle AHM$ (за катетом і гіпотенузою), а тому $HK = HM$.



Мал. 186

Правильним є і обернене твердження.

3. Якщо проекції двох похилих, проведених з точки до прямої, між собою рівні, то рівні між собою і самі похилі.

$\triangle AHK = \triangle AHM$ (за двома катетами), тому $AK = AM$ (мал. 186).

4. З двох похилих, проведених з точки до прямої, більшою є та, у якої більша проекція.

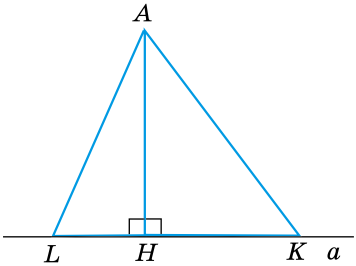
Нехай AK і AL – похилі, $HK > HL$ (мал. 187).
Тоді $AK^2 = AH^2 + HK^2$ (із $\triangle AHK$),
$AL^2 = AH^2 + HL^2$ (із $\triangle AHL$).
Але $HK > HL$, тому $AK^2 > AL^2$, отже, $AK > AL$.

Властивість справджується і в тому випадку, коли точки K і L розміщені по один їх бік від точки H.

Правильним є і обернене твердження.

5. З двох похилих, проведених з точки до прямої, більша похила має більшу проекцію.

Нехай AK і AL – похилі, $AK > AL$ (мал. 187).



Мал. 187

Тоді $HK^2 = AK^2 - AH^2$ (із $\triangle AHK$),

$HL^2 = AL^2 - AH^2$ (із $\triangle AHL$).

Але $AK > AL$, тому $HK^2 > HL^2$, отже, $HK > HL$.

Задача 1. З точки до прямої проведено дві похилі. Довжина однієї з них дорівнює 10 см, а її проекції – 6 см. Знайдіть довжину другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут 30°.

Р о з в' я з а н н я. Нехай на малюнку 187 $AL = 10$ см, $HL = 6$ см, $\angle AKH = 30°$.

1) Із $\triangle AHL$: $AH = \sqrt{AL^2 - LH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ см.

2) Із $\triangle AHK$ за властивістю катета, що лежить проти кута 30°, матимемо: $AH = \dfrac{AK}{2}$.

Тому $AK = 2 \cdot AH = 2 \cdot 8 = 16$ (см).

В і д п о в і д ь. 16 см.

Задача 2. З точки до прямої проведено дві похилі, проекції яких дорівнюють 30 см і 9 см. Знайдіть довжини похилих, якщо їх різниця дорівнює 9 см.

Р о з в' я з а н н я. Нехай на малюнку 187 $KH = 30$ см, $HL = 9$ см.

За властивістю 4: $AK > AL$. Позначимо $AL = x$ см. Тоді $AK = (x + 9)$ см.

Із $\triangle AHL$: $AH^2 = AL^2 - LH^2$, тому $AH^2 = x^2 - 9^2$.

Із $\triangle AHK$: $AH^2 = AK^2 - HK^2$, тому $AH^2 = (x + 9)^2 - 30^2$.

Ліві частини отриманих рівностей рівні, отже, рівні і праві їх частини.

Маємо рівняння: $(x + 9)^2 - 30^2 = x^2 - 9^2$, звідки $x = 41$.

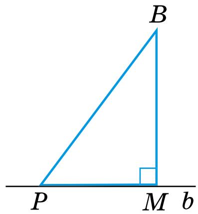
Отже, $AL = 41$ см, $AK = 41 + 9 = 50$ (см).

В і д п о в і д ь. 41 см, 50 см.

1. Що називають похилою, проведеною з точки до прямої?
2. Що називають основою похилої?
3. Що називають проекцією похилої?
4. Сформулюйте властивості похилих та їх проекцій.

1 Початковий рівень

683. (Усно.) Назвіть на малюнку 188:
1) перпендикуляр, проведений з точки B до прямої b;
2) основу перпендикуляра;
3) похилу, проведену з точки B до прямої b;
4) основу похилої;
5) проекцію похилої.



Мал. 188

684. Накресліть пряму m і позначте точку P, що їй не належить. Проведіть перпендикуляр PK і похилу PM до прямої m.

685. (Усно.) BM – перпендикуляр до прямої b, BP – похила (мал. 188). Порівняйте BM і BP.

686. Довжина перпендикуляра, проведеного з точки до прямої, дорівнює 5 см, а довжина похилої, проведеної із цієї самої точки, – 13 см. Знайдіть проекцію похилої на дану пряму.

687. Перпендикуляр, проведений з даної точки до прямої, дорівнює 6 см. Із цієї самої точки до прямої проведено похилу, проекція якої на пряму дорівнює 8 см. Знайдіть довжину похилої.

2 Середній рівень

688. З точки до прямої проведено дві рівні між собою похилі. Проекція однієї з них дорівнює 6 см. Знайдіть відстань між основами похилих.

689. З точки до прямої проведено дві рівні між собою похилі. Відстань між їх основами дорівнює 10 см. Знайдіть проекції похилих на дану пряму.

690. Точка лежить на відстані 10 см від прямої. Із цієї точки до прямої проведено похилу, що утворює з прямою кут 30°. Знайдіть довжину похилої та її проекції на пряму.

691. Точка лежить на відстані 2 см від прямої. Із цієї точки до прямої проведено похилу, що утворює з прямою кут 45°. Знайдіть проекцію похилої на цю пряму та довжину похилої.

692. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 13 см, а її проекція – 5 см. Знайдіть проекцію другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут 45°.

693. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 12 см і утворює з прямою кут 30°. Знайдіть довжину другої похилої, якщо її проекція на пряму – 8 см.

694. З точки до прямої проведено дві похилі завдовжки 13 см і 20 см. Проекція першої на пряму дорівнює 5 см. Знайдіть проекцію другої похилої.

3 Достатній рівень

695. З точки, що знаходиться на відстані 24 см від прямої, проведено дві похилі завдовжки 25 см і 26 см. Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки випадків слід розглянути?

696. З точки, що знаходиться на відстані 8 см від прямої, проведено дві похилі завдовжки 10 см і 17 см. Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки випадків слід розглянути?

697. З точки до прямої проведено дві похилі завдовжки 5 см і 8 см. Який кут утворює друга похила з прямою, якщо проекція першої похилої на пряму дорівнює 3 см?

698. З точки до прямої проведено дві похилі. Довжина однієї з похилих дорівнює 41 см, а її проекції – 9 см. Який кут утворює інша похила з прямою, якщо її проекція на цю пряму дорівнює 40 см?

699. Точки M і N лежать по один бік від прямої a. Із цих точок до прямої a проведено перпендикуляри завдовжки 2 см і 7 см. Знайдіть відстань між основами перпендикулярів, якщо $MN = 13$ см.

700. Точки A і B лежать по один бік від прямої m. Із цих точок до прямої m проведено перпендикуляри завдовжки 1 см і 7 см. Знайдіть AB, якщо відстань між основами перпендикулярів дорівнює 8 см.

701. З точки до прямої проведено дві похилі завдовжки 10 см і 14 см, різниця проекцій яких дорівнює 8 см. Знайдіть проекції похилих та відстань від точки до прямої.

702. З точки до прямої проведено дві похилі, різниця яких дорівнює 2 см. Знайдіть ці похилі та відстань від точки до прямої, якщо проекції похилих дорівнюють 1 см і 5 см.

4 Високий рівень

703. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Знайдіть проекції двох менших сторін на більшу сторону.

704. Сторони гострокутного трикутника дорівнюють 25 см, 29 см і 36 см. Знайдіть проекції двох більших сторін на меншу сторону.

705. З точки A до прямої m проведено похилі AB і AC та перпендикуляр AK, причому точка K лежить між точками B і C. $AB = 15$ см, $AK = 12$ см, $KC = 16$ см. Знайдіть $\angle BAC$.

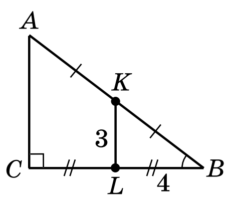
Вправи для повторення

3 **706.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 5 см і 11 см, а її висота – 6 см. Знайдіть діагональ трапеції.

707. Радіуси двох кіл, які мають зовнішній дотик, дорівнюють 1 см і 4 см. Пряма a – спільна дотична цих кіл. Знайдіть відстань між точками дотику прямої a з колами.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

708. У трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) проведено середню лінію KL (мал. 189). $KL = 3$ см, $LB = 4$ см.



Мал. 189

1) У $\triangle KBL$ та $\triangle ABC$ знайдіть відношення катета, протилежного до кута B, до катета, прилеглого до кута B, і порівняйте отримані значення.

2) У $\triangle KBL$ і $\triangle ABC$ знайдіть відношення катета, протилежного до кута B, до гіпотенузи та порівняйте отримані значення.

3) У $\triangle KBL$ і $\triangle ABC$ знайдіть відношення катета, прилеглого до кута B, до гіпотенузи та порівняйте отримані значення.

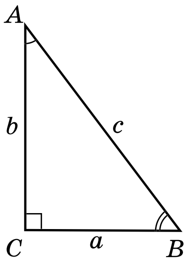
709. Визначте міру кутів трикутника зі сторонами завдовжки:

1) 1 см; $\sqrt{3}$ см; 2 см; 2) 1 см; 1 см; $\sqrt{2}$ см.

Цікаві задачі для учнів неледачих

710. (*Задача Стенфордського університету.*) Точку P так розташовано всередині прямокутника, що відстань від неї до вершини прямокутника дорівнює 5 ярдів, до протилежної вершини – 14 ярдів, а до третьої вершини – 10 ярдів. Якою є відстань від точки P до четвертої вершини?

§ 20. СИНУС, КОСИНУС І ТАНГЕНС ГОСТРОГО КУТА ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ І КУТАМИ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА



Мал. 190

Розглянемо прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C (мал. 190). Для гострого кута A катет BC є *протилежним катетом*, а катет AC – *прилеглим катетом*. Для гострого кута B катет AC є протилежним, а катет BC – прилеглим.

Синусом гострого кута прямокутного трикутника **називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.**

Синус кута A позначають так: $\sin A$. Отже,

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}, \quad \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}.$$

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника **називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.**

Косинус кута A позначають так: $\cos A$. Отже,

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}.$$

Оскільки катети AC і BC менші від гіпотенузи AB, то *синус і косинус гострого кута прямокутного трикутника менші за одиницю*.

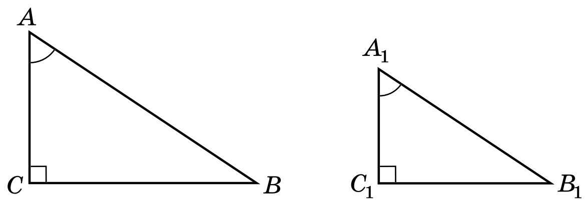
Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника **називають відношення протилежного катета до прилеглого.**

Тангенс кута A позначають так: $\operatorname{tg} A$. Отже,

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}.$$

Доведемо, що **якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то синуси цих кутів рівні, косинуси цих кутів рівні і тангенси цих кутів рівні.**

Розглянемо прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $\angle A = \angle A_1$ (мал. 191). Тоді $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (за гострим кутом). Тому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Із цього слідує, що $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, а тому $\sin A = \sin A_1$. Аналогічно $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, тому $\cos A = \cos A_1$, $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, тому $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_1$.



Мал. 191

Отже, приходимо до висновку: *синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника залежать лише від градусної міри кута*.

З означень синуса, косинуса і тангенса кута слідують такі *співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника*.

1. Катет дорівнює гіпотенузі, помноженій на синус протилежного до нього кута або на косинус прилеглого: $a = c\sin A = c\cos B$ **та** $b = c\sin B = c\cos A$.

2. Гіпотенуза дорівнює катету, поділеному на синус протилежного до нього кута або на косинус прилеглого: $c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos A}$.

3. Катет, протилежний до кута A, дорівнює добутку другого катета на тангенс цього кута: $a = b\operatorname{tg} A$.

4. Катет, прилеглий до кута A, дорівнює частці від ділення другого катета на тангенс цього кута: $b = \frac{a}{\operatorname{tg} A}$.

Значення sin$A$, cos$A$, tg$A$ можна знаходити за допомогою спеціальних таблиць, калькулятора або комп'ютера. Для обчислень використовуємо клавіші калькулятора $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ і $\boxed{\text{tg}}$ (на деяких калькуляторах $\boxed{\tan}$). Послідовність обчислень у різних калькуляторів різниться. Тому радимо уважно ознайомитися з інструкцією до калькулятора.

Задача 1. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = 12$ см, $\cos A = \dfrac{3}{4}$. Знайдіть AB.

Р о з в' я з а н н я. Скористаємося малюнком 190.

$AB = \dfrac{AC}{\cos A} = 12 : \dfrac{3}{4} = 16$ (см).

В і д п о в і д ь. 16 см.

Задача 2. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AB = 10$ см, $\angle A = 17°$. Знайдіть BC (з точністю до десятих сантиметра).

Р о з в' я з а н н я. $BC = AB \sin A$ (мал. 190). За допомогою таблиць або калькулятора знаходимо $\sin 17° \approx 0{,}2924$. Отже, $BC \approx 10 \cdot 0{,}2924 \approx 2{,}9$ (см).

В і д п о в і д ь. $\approx 2{,}9$ см.

За допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера можна за даним значенням sin$A$, cos$A$ або tg$A$ знаходити кут A. Для обчислень використовуємо клавіші калькулятора $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ і $\boxed{\text{tg}^{-1}}$.

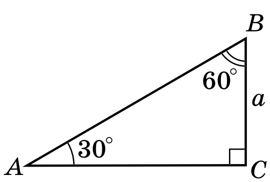
Задача 3. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = 4$ см, $BC = 5$ см. Знайдіть гострі кути трикутника.

Р о з в' я з а н н я. $\text{tg} A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$ (мал. 190). За допомогою калькулятора знаходимо значення кута A у градусах: 51,34019. Подаємо у градусах та мінутах (у деяких калькуляторах це можливо зробити за допомогою спеціальної клавіші). Маємо: $\angle A \approx 51°20'$. Тоді $\angle B = 90° - \angle A \approx 90° - 51°20' \approx 38°40'$.

В і д п о в і д ь. $\approx 51°20'$; $\approx 38°40'$.

Знайдемо *синус, косинус і тангенс кутів* 30° *і* 60°.

Розглянемо $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $BC = a$ (мал. 192). Тоді за властивістю катета, що лежить проти кута 30°, $AB = 2a$.



Мал. 192

За теоремою Піфагора:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} =$$

$$= \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

Тоді

$\sin A = \dfrac{BC}{AB}$, тобто $\sin 30^\circ = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$;

$\cos A = \dfrac{AC}{AB}$, тобто $\cos 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC}$, тобто $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

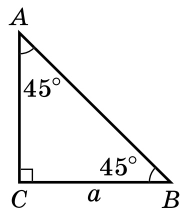
$\sin B = \dfrac{AC}{AB}$, тобто $\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sin B = \dfrac{BC}{AB}$, тобто $\cos 60^\circ = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$;

$\operatorname{tg} B = \dfrac{AC}{BC}$, тобто $\operatorname{tg} 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$.

Знайдемо синус, косинус і тангенс кута 45°.

Розглянемо $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \angle B = 45^\circ$, $BC = a$ (мал. 193). Тоді $AC = BC = a$. За теоремою Піфагора: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.



Мал. 193

Тоді

$\sin A = \dfrac{BC}{AB}$, тобто $\sin 45^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos A = \dfrac{AC}{AB}$, тобто $\cos 45^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

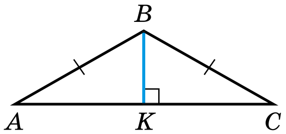
$\operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC}$, тобто $\operatorname{tg} 45^\circ = \dfrac{a}{a} = 1$.

Систематизуємо отримані дані в таблицю:

A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
$\operatorname{tg} A$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Задача 4. Знайдіть висоту рівнобедреного трикутника, проведену до основи, якщо основа дорівнює 12 см, а кут при вершині трикутника дорівнює 120°.

Р о з в' я з а н н я. Нехай ABC – даний трикутник, $AB = BC$, $AC = 12$ см, $\angle ABC = 120°$ (мал. 194).



Мал. 194

Проведемо до основи AC висоту BK, яка є також медіаною і бісектрисою. Тоді

$$KC = \frac{AC}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (см)},$$

$$\angle KBC = \angle ABC : 2 = 120° : 2 = 60°.$$

Із $\triangle BKC$ ($\angle K = 90°$): $\operatorname{tg} KBC = \dfrac{KC}{BK}$,

звідси $BK = \dfrac{KC}{\operatorname{tg} KBC} = \dfrac{6}{\operatorname{tg} 60°} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ (см).

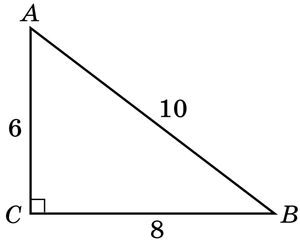
В і д п о в і д ь. $2\sqrt{3}$ см.

1. Що називають синусом, косинусом і тангенсом гострого кута прямокутного трикутника?
2. Якими залежностями пов'язані між собою сторони і кути прямокутного трикутника?

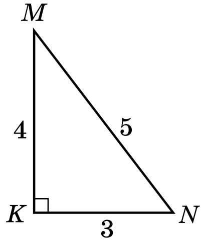
1 Початковий рівень

711. Дано $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$ (мал. 195). Знайдіть:

1) $\sin A$; 2) $\cos B$; 3) $\operatorname{tg} A$; 4) $\cos A$; 5) $\sin B$; 6) $\operatorname{tg} B$.



Мал. 195



Мал. 196

712. Дано $\triangle MNK$, $\angle K = 90°$ (мал. 196). Знайдіть:

1) $\cos M$; 2) $\sin N$; 3) $\operatorname{tg} M$; 4) $\sin M$; 5) $\cos N$; 6) $\operatorname{tg} N$.

713. Знайдіть за допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера:

1) $\cos 18°$; 2) $\sin 40°$; 3) $\operatorname{tg} 13°$;

4) $\cos 12°10'$; 5) $\sin 67°30'$; 6) $\operatorname{tg} 81°48'$.

714. Знайдіть за допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера:

1) $\sin 58°$; 2) $\cos 32°$; 3) $\operatorname{tg} 78°$;
4) $\sin 14°42'$; 5) $\cos 49°30'$; 6) $\operatorname{tg} 15°12'$.

715. Обчисліть:

1) $\sin 30° + \operatorname{tg} 45°$; 2) $\cos 30° \cdot \sin 60°$.

716. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg} 45° - \cos 60°$; 2) $\sin 45° : \cos 45°$.

2 Середній рівень

717. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $AC = 5$ см, $BC = 12$ см. Знайти: $\sin A$, $\cos A$.

718. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $AC = 7$ см, $BC = 24$ см. Знайти: $\sin B$, $\cos B$.

719. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Знайдіть:

1) AC, якщо $BC = a$, $\angle B = \beta$;
2) AB, якщо $AC = b$, $\angle A = \alpha$.

720. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Знайдіть:

1) BC, якщо $AC = b$, $\angle A = \alpha$;
2) AB, якщо $BC = a$, $\angle B = \beta$.

721. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Знайдіть:

1) AB, якщо $AC = 5$ см, $\cos A = \frac{1}{4}$;
2) AB, якщо $BC = 3$ см, $\sin A = 0{,}6$;
3) AC, якщо $AB = 8$ см, $\sin B = \frac{3}{4}$;
4) BC, якщо $AB = 20$ см, $\cos B = \frac{4}{5}$;
5) AC, якщо $BC = 10$ см, $\operatorname{tg} B = 0{,}5$.

722. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Знайдіть:

1) AB, якщо $BC = 8$ см, $\cos B = \frac{1}{2}$;
2) AB, якщо $AC = 10$ см, $\sin B = 0{,}25$;
3) BC, якщо $AB = 6$ см, $\sin A = \frac{1}{3}$;
4) AC, якщо $AB = 20$ см, $\cos A = 0{,}4$;
5) BC, якщо $AC = 12$ см, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$.

723. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Знайдіть:

1) AB, якщо $AC = 4\sqrt{3}$ см, $\angle A = 30°$;
2) AC, якщо $AB = 5\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45°$.

724. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Знайдіть:

1) AB, якщо $BC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle B = 30°$;
2) BC, якщо $AB = 10\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45°$.

725. Знайдіть (за допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера) гострий кут α, якщо:

1) $\sin\alpha = 0{,}4226$; 2) $\cos\alpha = 0{,}8192$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2679$;
4) $\sin\alpha = 0{,}8231$; 5) $\cos\alpha = 0{,}9373$; 6) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}6924$.

726. Знайдіть (за допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера) гострий кут β, якщо:

1) $\cos\beta = 0{,}1908$; 2) $\sin\beta = 0{,}8387$; 3) $\operatorname{tg}\beta = 0{,}7265$;
4) $\cos\beta = 0{,}5493$; 5) $\sin\beta = 0{,}3518$; 6) $\operatorname{tg}\beta = 1{,}1792$.

727. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. За допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера знайдіть із точністю до сотих сантиметра:

1) AB, якщо $BC = 5$ см, $\angle A = 42°$;
2) BC, якщо $AB = 10$ см, $\angle B = 37°$;
3) BC, якщо $AC = 4$ см, $\angle A = 82°$.

728. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. За допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера знайдіть із точністю до сотих сантиметра:

1) AC, якщо $AB = 8$ см, $\angle A = 15°$;
2) AB, якщо $BC = 9$ см, $\angle A = 43°$;
3) BC, якщо $AC = 5$ см, $\angle B = 29°$.

3 Достатній рівень

729. Побудуйте кут: 1) тангенс якого дорівнює $\frac{3}{5}$;
2) синус якого дорівнює $\frac{1}{7}$;
3) косинус якого дорівнює $\frac{2}{3}$.

730. Побудуйте кут: 1) тангенс якого дорівнює $\frac{2}{7}$;
2) синус якого дорівнює $\frac{4}{5}$;
3) косинус якого дорівнює $\frac{1}{3}$.

731. Діагональ прямокутника утворює з його стороною, довжина якої a, кут β. Знайдіть периметр прямокутника.

732. Одна сторона прямокутника дорівнює b. Його діагональ утворює з другою стороною кут α. Знайдіть площу прямокутника.

733. Кут ромба дорівнює $42°$, а діагональ, що лежить проти нього, – 6 см. Знайдіть другу діагональ ромба (з точністю до сотих сантиметра).

734. Сторона ромба дорівнює 8 см, а один з його кутів – $78°$. Знайдіть (з точністю до сотих сантиметра) діагональ ромба, що виходить із цього кута.

735. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює c, а один з гострих кутів – α. Знайдіть висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.

736. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює h. Знайдіть гіпотенузу трикутника, якщо один з його гострих кутів дорівнює β.

737. Гіпотенуза прямокутного трикутника відноситься до катета цього трикутника як $8 : 5$. Знайдіть (з точністю до градуса) гострі кути цього трикутника.

738. Відношення катетів прямокутного трикутника дорівнює $9 : 5$. Знайдіть (з точністю до градуса) гострі кути цього трикутника.

739. Дано: $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Знайдіть:

а) AB і BC, якщо $AC = 6$ см, $\cos B = 0{,}8$;

б) AC і BC, якщо $AB = 13$ см, $\operatorname{tg} A = \frac{5}{12}$.

740. Дано: $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Знайдіть:

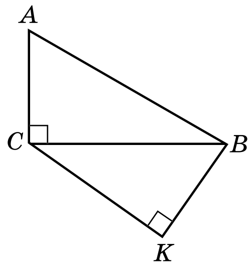
а) AB і BC, якщо $AC = 4$ см, $\sin A = 0{,}6$;

б) AC і BC, якщо $AB = 34$ см, $\operatorname{tg} B = \frac{8}{15}$.

741. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють $2a$ і $2b$ $(a > b)$, а гострий кут – α. Знайдіть бічну сторону трапеції.

742. На малюнку 197 $\angle ACB = \angle K = 90°$, $AC = b$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCK = \gamma$. Знайдіть BC, CK, KB.

743. На малюнку 197 $\angle ACB = \angle K = 90°$, $BK = a$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCK = \alpha$. Знайдіть BC, AC, AB.



Мал. 197

4 Високий рівень

744. Сторони прямокутника дорівнюють 19 см і 50 см. Знайдіть гострий кут між діагоналями прямокутника (з точністю до мінути).

745. Діагоналі ромба дорівнюють 10 см і 12 см. Знайдіть кути ромба (з точністю до мінути).

746. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює m, а кут при основі – α. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей трикутник.

747. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює β, а радіус вписаного кола – r. Знайдіть бічну сторону трикутника.

748. Гострий кут паралелограма дорівнює $45°$. Діагональ ділить тупий кут у відношенні $1 : 2$. Знайдіть цю діагональ, якщо периметр паралелограма дорівнює 20 см.

749. Гострий кут паралелограма дорівнює $60°$. Діагональ ділить тупий кут у відношенні $1 : 3$. Знайдіть цю діагональ, якщо периметр паралелограма дорівнює 24 см.

750. У трикутнику одна зі сторін дорівнює 10 см, а прилеглі до неї кути – $135°$ і $30°$. Знайдіть висоту трикутника, проведену до даної сторони.

751. У трикутнику одна зі сторін дорівнює 8 см, а прилеглі до неї кути – $60°$ і $45°$. Знайдіть висоту трикутника, проведену до цієї сторони.

Вправи для повторення

2 **752.** Похила, проведена з точки до прямої, у два рази більша за перпендикуляр, проведений із цієї самої точки до цієї ж прямої. Знайдіть кут між похилою і перпендикуляром.

3 **753.** Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а його проекція на гіпотенузу – 7,2 см. Знайдіть периметр трикутника.

4 **754.** Побудуйте ромб за висотою і меншою діагоналлю.

Цікаві задачі для учнів неледачих

755. (*Задача Архімеда.*) Якщо в колі хорди AB і CD перетинаються в точці E під прямим кутом, то сума квадратів відрізків AE, BE, CE і DE дорівнює квадрату діаметра. Доведіть це.

§ 21. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

Розв'язати трикутник – означає знайти невідомі його сторони і невідомі його кути за відомими сторонами і кутами.

Для того щоб можна було розв'язати прямокутний трикутник, відомими мають бути або дві сторони трикутника або одна зі сторін і один з гострих кутів трикутника.

Використовуючи у прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) позначення $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ (мал. 198) та співвідношення між його сторонами і кутами:

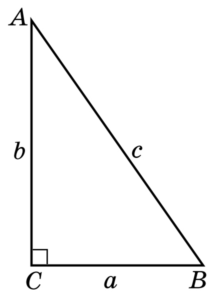
$\angle A + \angle B = 90°$;

$a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Піфагора);

$a = c\sin A = c\cos B = b\,\mathrm{tg}\,A = \dfrac{b}{\mathrm{tg}\,B}$;

$b = c\sin B = c\cos A = a\,\mathrm{tg}\,B = \dfrac{a}{\mathrm{ctg}\,A}$;

$c = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\cos A} = \dfrac{a}{\cos B} = \dfrac{b}{\sin A}$,



Мал. 198

можна розв'язати будь-який прямокутний трикутник.

Розглянемо чотири види задач на розв'язування прямокутних трикутників.

Зразки запису їх розв'язування в загальному вигляді та приклади задач подано у вигляді таблиці.

1. *Розв'язування прямокутних трикутників за гіпотенузою і гострим кутом.*

Задача 1. Дано гіпотенузу c прямокутного трикутника і гострий кут A. Знайдіть другий гострий кут трикутника і його катети.

Розв'язання в загальному вигляді	Приклад
Д а н о: c, $\angle A$. З н а й т и: $\angle B$, a, b. Р о з в' я з а н н я. 1. $\angle B = 90° - \angle A$. 2. $a = c \sin A$. 3. $b = c \cos A$.	Д а н о: $c = 7$, $\angle A = 29°$. З н а й т и: $\angle B$, a, b. Р о з в' я з а н н я. 1. $\angle B = 90° - 29° = 61°$. 2. $a = 7 \sin 29° \approx 3{,}39$. 3. $b = 7 \cos 29° \approx 6{,}12$. В і д п о в і д ь: 61°, ≈ 3,39, ≈ 6,12.

2. *Розв’язування прямокутних трикутників за катетом і гострим кутом.*

Задача 2. Дано катет a прямокутного трикутника і гострий кут A. Знайдіть другий гострий кут трикутника, його другий катет і гіпотенузу.

Розв’язання в загальному вигляді	Приклад
Д а н о: a, $\angle A$. З н а й т и: $\angle B$, b, c. Р о з в’ я з а н н я. 1. $\angle B = 90° - \angle A$. 2. $b = \dfrac{a}{\operatorname{tg} A}$ (або $b = a\operatorname{tg} B$). 3. $c = \dfrac{a}{\sin A}$ $\left(\text{або } c = \sqrt{a^2 + b^2}\right)$.	Д а н о: $a = 5$, $\angle A = 63°$. З н а й т и: $\angle B$, b, c. Р о з в’ я з а н н я. 1. $\angle B = 90° - 63° = 27°$. 2. $b = \dfrac{5}{\operatorname{tg} 63°} \approx 2{,}55$. 3. $c = \dfrac{5}{\sin 63°} \approx 5{,}61$. В і д п о в і д ь: $27°$, $\approx 2{,}55$, $\approx 6{,}61$.

3. *Розв’язування прямокутних трикутників за двома катетами.*

Задача 3. Дано катети a і b прямокутного трикутника. Знайдіть гіпотенузу та гострі кути трикутника.

Розв’язання в загальному вигляді	Приклад
Д а н о: a, b. З н а й т и: c, $\angle A$, $\angle B$. Р о з в’ я з а н н я. 1. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. 2. $\operatorname{tg} A = \dfrac{a}{b}$. Далі $\angle A$ знаходимо за допомогою калькулятора або таблиць. 3. $\angle B \approx 90° - \angle A$.	Д а н о: $a = 4$, $b = 7$. З н а й т и: c, $\angle A$, $\angle B$. Р о з в’ я з а н н я. 1. $c = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} \approx 8{,}06$. 2. $\operatorname{tg} A = \dfrac{4}{7}$; $\angle A \approx 29°45'$. 3. $\angle B \approx 90° - 29°45' = 60°15'$. В і д п о в і д ь: 8,06, $\approx 29°45'$, $\approx 60°15'$.

4. *Розв’язування прямокутних трикутників за катетом і гіпотенузою.*

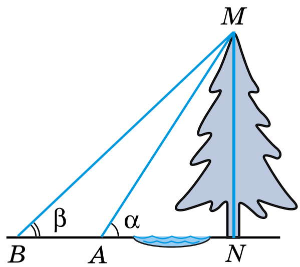
Задача 4. Дано катет a і гіпотенузу c прямокутного трикутника. Знайдіть другий катет і гострі кути трикутника.

Розв’язання в загальному вигляді	Приклад
Д а н о: a, c. З н а й т и: b, $\angle A$, $\angle B$. Р о з в’ я з а н н я. 1. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. 2. $\sin A = \frac{a}{c}$. Далі $\angle A$ знаходимо за допомогою калькулятора або таблиць. 3. $\angle B \approx 90° - \angle A$.	Д а н о: $a = 5$, $c = 12$. З н а й т и: b, $\angle A$, $\angle B$. Р о з в’ я з а н н я. 1. $b = \sqrt{12^2 - 5^2} = \sqrt{119} \approx 10{,}91$. 2. $\sin A = \frac{5}{12}$; $\angle A \approx 24°37'$. 3. $\angle B \approx 90° - 24°37' = 65°23'$. Відповідь: $\approx 10{,}91$, $\approx 24°37'$, $\approx 65°23'$.

Розв’язування прямокутних трикутників використовують під час розв’язування прикладних задач.

Задача 5. Знайдіть висоту дерева MN, основа N якого є недоступною (мал. 199).

Р о з в’ я з а н н я. Позначимо на прямій, яка проходить через точку N, основу дерева, точки A та B і виміряємо відрізок AB та $\angle MAN = \alpha$ і $\angle MBN = \beta$.



Мал. 199

1) У $\triangle MAN$: $AN = \dfrac{MN}{\operatorname{tg}\alpha}$;

2) У $\triangle MBN$: $BN = \dfrac{MN}{\operatorname{tg}\beta}$;

3) Оскільки $AB = BN - AN$, маємо:

$$AB = \frac{MN}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{MN}{\operatorname{tg}\alpha} = MN\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = MN \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta};$$

звідки $MN = \dfrac{AB \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$.

В і д п о в і д ь. $\dfrac{AB \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$.

1. Що означає розв’язати трикутник?
2. Які співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника використовують для розв’язування трикутників?
3. Як розв’язати прямокутний трикутник: 1) за гіпотенузою і гострим кутом; 2) за катетом і гострим кутом; 3) за двома катетами; 4) за катетом і гіпотенузою?

2 Середній рівень

756. За гіпотенузою AB прямокутного трикутника ABC і гострим кутом знайдіть інші його сторони та другий гострий кут (сторони трикутника в задачах 3) і 4) знайдіть із точністю до сотих).

1) $AB = 10$ см; $\angle A = 30°$; 2) $AB = 8$ дм; $\angle B = 45°$;
3) $AB = 15$ см; $\angle A = 18°$; 4) $AB = 12$ дм; $\angle B = 73°$.

757. За гіпотенузою AB прямокутного трикутника ABC і гострим кутом знайдіть інші його сторони та другий гострий кут (сторони трикутника в задачах 3) і 4) знайдіть із точністю до сотих).

1) $AB = 6$ дм; $\angle A = 45°$; 2) $AB = 14$ см; $\angle B = 60°$;
3) $AB = 8$ дм; $\angle A = 82°$; 4) $AB = 3$ см; $\angle B = 25°$.

758. За катетом трикутника ABC ($\angle C = 90°$) і його гострим кутом знайдіть інші сторони та другий гострий кут трикутника (сторони трикутника в задачах 2) і 3) знайдіть із точністю до сотих).

1) $AC = 8$ см; $\angle B = 30°$; 2) $AC = 13$ см; $\angle A = 24°$;
3) $BC = 6$ дм; $\angle A = 42°$; 4) $BC = 5$ см; $\angle B = 45°$.

759. За катетом трикутника ABC ($\angle C = 90°$) і його гострим кутом знайдіть інші сторони та другий гострий кут трикутника (сторони трикутника в задачах 2) і 3) знайдіть із точністю до сотих).

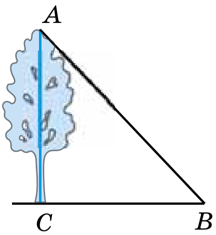
1) $AC = 15$ см; $\angle A = 60°$; 2) $AC = 6$ дм; $\angle B = 12°$;
3) $BC = 8$ см; $\angle B = 71°$; 4) $BC = 10$ дм; $\angle A = 45°$.

760. Діагональ прямокутника дорівнює 6 см і утворює кут 25° з однією з його сторін. Знайдіть кут, що утворює діагональ прямокутника з другою стороною, та сторони прямокутника (з точністю до сотих см).

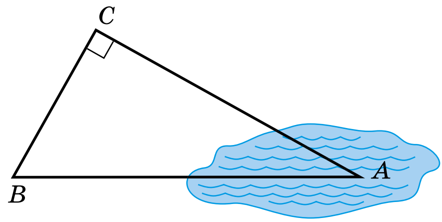
761. З точки, що знаходиться на відстані 6 см від прямої, проведено похилу, що утворює з прямою кут 52°. Знайдіть кут, який утворює похила з перпендикуляром, проведеним з тієї самої точки, довжину перпендикуляра та проекцію похилої (з точністю до сотих см).

762. Знайдіть висоту дерева AC (мал. 200), якщо $BC = 40$ м, а $\angle B = 27°$.

763. За малюнком 201 знайдіть відстань від об'єкта B до недоступного об'єкта A, якщо $\angle C = 90°$, $BC = 80$ м, $\angle B = 57°$.



Мал. 200



Мал. 201

3 Достатній рівень

764. За двома катетами трикутника ABC ($\angle C = 90°$) знайдіть його гіпотенузу та гострі кути із точністю до мінут:

1) $AC = 4$ см; $BC = 4\sqrt{3}$ см; 2) $AC = 8$ дм; $BC = 15$ дм;
3) $AC = 3$ см; $BC = 9$ см; 4) $AC = 7m$ дм; $BC = 24m$ дм.

765. За двома катетами трикутника ABC ($\angle C = 90°$) знайдіть його гіпотенузу та гострі кути із точністю до мінут:

1) $AC = 2\sqrt{3}$ см; $BC = 2$ см; 2) $AC = 8$ см; $BC = 6$ см;
3) $AC = 2$ дм; $BC = 5$ дм; 4) $AC = 9k$ дм; $BC = 40k$ дм.

766. За катетом і гіпотенузою трикутника ABC ($\angle C = 90°$) знайдіть його другий катет та гострі кути із точністю до мінути:

1) $AB = 6$ см; $AC = 3\sqrt{3}$ см; 2) $AB = 65$ дм; $BC = 16$ дм;
3) $AB = 7$ дм; $AC = 4$ см; 4) $AB = 13a$ см; $BC = 5a$ см.

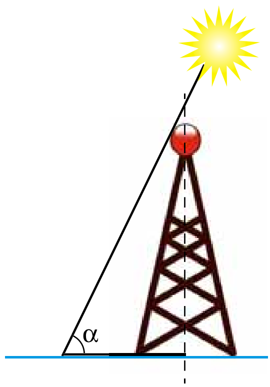
767. За катетом і гіпотенузою трикутника ABC ($\angle C = 90°$) знайдіть його другий катет та гострі кути із точністю до мінути:

1) $AB = 8$ см; $AC = 4\sqrt{2}$ см; 2) $AB = 37$ дм; $BC = 12$ дм;
3) $AB = 10$ см; $AC = 7$ см; 4) $AB = 61b$ дм; $BC = 60b$ дм.

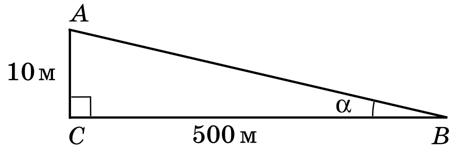
768. Тінь від антени мобільного зв'язку, висота якої 5 м, дорівнює 2,6 м (мал. 202). Знайдіть з точністю до мінути висоту сонця над горизонтом (кут α).

769. Знайдіть укіс дороги (значення тангенса кута α) за малюнком 203. Знайдіть міру кута α.

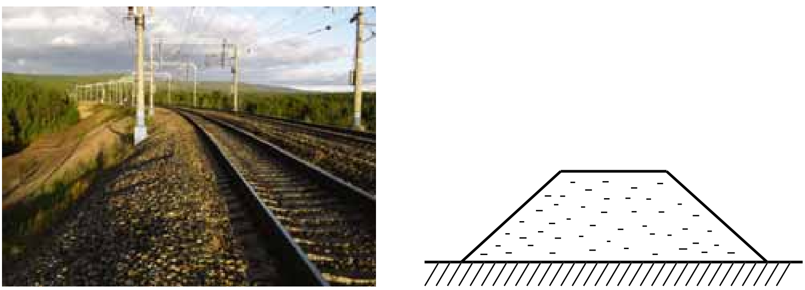
770. Переріз залізничного насипу має форму рівнобічної трапеції (мал. 204). Нижня основа трапеції дорівнює 10 м, висота насипу – 2 м, а його укіс – 35°. Знайдіть ширину верхньої частини насипу (верхню основу трапеції).



Мал. 202



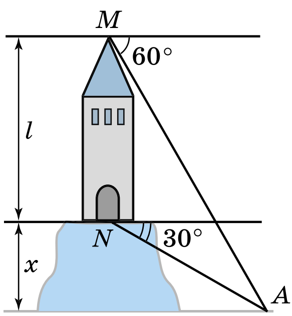
Мал. 203



Мал. 204

4 Високий рівень

771. На горі знаходиться башта, висота якої l м (мал. 205). За деяким об'єктом A, що знаходиться біля підніжжя гори, спостерігають спочатку з вершини M башти під кутом $60°$ до горизонту, а потім від основи башти N під кутом $30°$. Знайдіть висоту x гори.



Мал. 205

Вправи для повторення

2 **772.** Діагоналі ромба дорівнюють 16 см і 30 см. Знайдіть периметр ромба.

3 **773.** У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $BC = 12$ см, $\sin B = \frac{3}{5}$. Знайдіть периметр трикутника.

774. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки, які дорівнюють 30 см і 40 см. Знайдіть найменшу сторону трикутника.

Цікаві задачі для учнів неледачих

775. Аркуш паперу склали вчетверо так, що отримали прямокутник зі сторонами вдвічі меншими, ніж сторони аркуша. Потім отриманий прямокутник прокололи у двох місцях, аркуш розгорнули і через кожні дві отримані точки (проколи) провели пряму. Яку найменшу і яку найбільшу кількість прямих при цьому можна отримати?

Домашня самостійна робота № 4

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 7 см і 24 см.

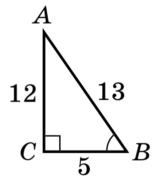
А. $\sqrt{527}$ см; **Б.** 31 см; **В.** 25 см; **Г.** 23 см.

2. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а один з його катетів – 12 см. Знайдіть другий катет трикутника.

А. 8 см; **Б.** 9 см; **В.** 10 см; **Г.** $\sqrt{369}$ см.

3. На малюнку 206 зображено прямокутний трикутник ABC. Знайдіть $\sin B$.

А. $\frac{12}{13}$; **Б.** $\frac{5}{13}$; **В.** $\frac{12}{5}$; **Г.** $\frac{5}{12}$.



Мал. 206

4. Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см. Знайдіть сторону ромба.

А. 8 см; **Б.** 10 см;
В. 16 см; **Г.** 20 см.

5. Точка знаходиться на відстані 8 см від прямої. З неї до прямої проведено перпендикуляр і похилу, яка утворює з перпендикуляром кут 60°. Знайдіть довжину похилої.

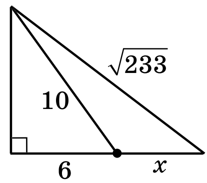
А. $8\sqrt{3}$ см; **Б.** 12 см; **В.** $8\sqrt{2}$ см; **Г.** 16 см.

6. AB – гіпотенуза прямокутного трикутника ABC, $AC = 8$ см, $\angle A = 50°$. Знайдіть AB з точністю до десятих.

А. 12,5 см; **Б.** 10,4 см;
В. 12,4 см; **Г.** 9,5 см.

7. Знайдіть x за малюнком 207.

А. 13; **Б.** 7;
В. 6; **Г.** 8.



Мал. 207

8. З точки до прямої проведено дві похилі, різниця довжин яких дорівнює 1 см. Знайдіть довжину меншої похилої, якщо проекції похилих дорівнюють 4 см і 7 см.

А. 15 см; **Б.** 16 см; **В.** 17 см; **Г.** 18 см.

9. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $AB = 20$ см, $\text{tg}A = 0{,}75$. Знайдіть P_{ABC}.

А. 50 см; **Б.** 38 см; **В.** 52 см; **Г.** 48 см.

10. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки 10 см і 26 см. Знайдіть гіпотенузу.

А. 36 см; **Б.** 38 см; **В.** 39 см; **Г.** 52 см.

11. Сторони трикутника – 5 см, 29 см і 30 см. Знайдіть проекцію меншої сторони трикутника на його більшу сторону.

А. 1,4 см; **Б.** 1,6 см; **В.** 1,8 см; **Г.** 2,4 см.

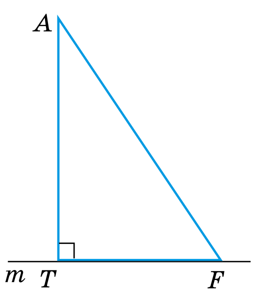
12. Сторони прямокутника дорівнюють 6 см і 10 см. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника (з точністю до градуса).

А. 31°; **Б.** 61°; **В.** 62°; **Г.** 64°.

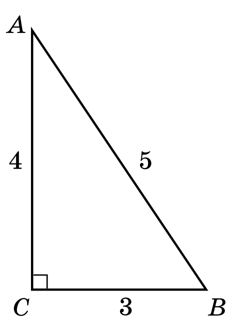
Завдання для перевірки знань до § 18–21

1. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 10 см і 24 см.

2. За малюнком 208 назвіть:
1) перпендикуляр, проведений з точки A до прямої m;
2) похилу, проведену з точки A до прямої m;
3) проекцію цієї похилої.



Мал. 208



Мал. 209

3. За малюнком 209 знайдіть:

1) $\sin A$; 2) $\cos B$; 3) $\operatorname{tg} A$; 4) $\sin B$.

4. Сторона ромба дорівнює 25 см, а одна з його діагоналей – 14 см. Знайдіть другу діагональ ромба.

5. Точка знаходиться на відстані 6 см від прямої. Із цієї точки до прямої проведено похилу, яка утворює з прямою кут 30°. Знайдіть довжину похилої та довжину проекції похилої на пряму.

6. $AB = 16$ см – гіпотенуза прямокутного трикутника ABC, $\angle A = 35°$. Розв’яжіть цей прямокутний трикутник. (Сторони трикутника знайдіть із точністю до сотих сантиметра.)

7. У трикутнику ABC $\angle A$ – тупий, $BC = 20$ см, $AB = 15$ см, $BK = 12$ см – висота трикутника. Знайдіть AC.

8. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $AC = 24$ см, $\sin A = \frac{5}{13}$. Знайдіть P_{ABC}.

9. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки 6 см і 10 см. Знайдіть сторони трикутника.

Додаткові завдання

10. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см. Знайдіть проекції двох менших сторін на більшу сторону.

11. Діагоналі ромба дорівнюють 6 см і 12 см. Знайдіть кути ромба з точністю до мінут.

Вправи для повторення розділу 3

До § 18

776. Нехай a і b – катети прямокутного трикутника, c – його гіпотенуза. Знайдіть:

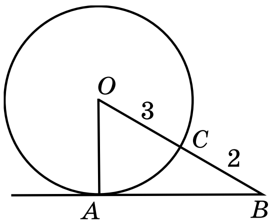
1) c, якщо $a = 11$ см; $b = 60$ см;

2) a, якщо $c = 13$ см; $b = 12$ см;

3) b, якщо $a = 24$ см; $c = 25$ см.

777. Сторона квадрата – 5 см. Знайдіть його діагональ.

778. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = AC = 37$ см, $BC = 24$ см. Знайдіть довжину висоти AK.



Мал. 210

779. Чи є прямокутним трикутник, сторони якого пропорційні числам:

1) 3; 4; 5; 2) 6; 7; 10?

780. Площа прямокутника дорівнює 12 см^2, а одна з його сторін – 3 см. Знайдіть діагональ прямокутника.

781. На малюнку 210 AB – дотична до кола із центром у точці O, OC = 3 см, CB = 2 см. Знайдіть AB.

782. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 8 см і 17 см, а більша бічна сторона – 15 см. Знайдіть периметр трапеції.

783. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 26 см, висота – 12 см, а діагональ – 20 см. Знайдіть меншу основу трапеції та її бічну сторону.

784. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 15 см, а катети відносяться як 3 : 4. Знайдіть периметр трикутника.

785. Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до основи як 5 : 6. Висота трикутника, проведена до основи, дорівнює 8 см. Знайдіть периметр трикутника.

786. У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки 50 см і 80 см, починаючи від вершини кута між бічними сторонами. Знайдіть висоту трикутника, проведену до основи.

787. У трикутнику ABC $AB = \sqrt{2}$ см, BC = 2 см. На стороні AC позначено точку K так, що $AK = KB$ = 1 см. Знайдіть градусну міру кута ABC.

788. Бічні сторони трапеції дорівнюють 9 см і 12 см, а основи – 30 см і 15 см. Знайдіть кут, що утворюють між собою продовження бічних сторін.

789. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 25 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо його найменша висота дорівнює 24 см.

До § 19

790. З точки до прямої проведено похилу, довжина якої 5 см. Знайдіть відстань від точки до прямої, якщо проекція похилої дорівнює 4 см.

791. З точки до прямої проведено дві похилі, які утворюють з прямою рівні кути. Відстань між основами похилих дорівнює 8 см. Знайдіть проекції похилих на дану пряму.

792. З точки до прямої проведено перпендикуляр і похилу, яка утворює з прямою кут 60°. Знайдіть перпендикуляр і проекцію похилої, якщо довжина похилої 12 см.

793. З точки, що знаходиться на відстані 4 см від прямої, проведено до неї дві похилі. Довжина однієї з них 5 см, а друга утворює з прямою кут 45°. Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки випадків слід розглянути?

794. З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких відносяться як 13 : 15, а довжини їх проекцій дорівнюють 10 см і 18 см. Знайдіть довжини похилих та відстань від точки до прямої.

795. Знайдіть меншу з висот трикутника, сторони якого дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см.

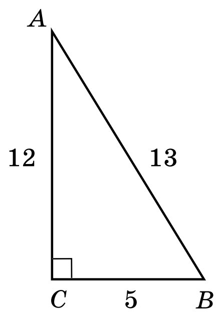
До § 20

796. На малюнку 211 трикутник ABC – прямокутний. Чи правильні рівності:

1) $\sin A = \frac{5}{12}$; 2) $\cos A = \frac{12}{13}$;

3) $\operatorname{tg} A = \frac{12}{5}$; 4) $\sin B = \frac{12}{13}$;

5) $\cos B = \frac{13}{5}$; 6) $\operatorname{tg} B = \frac{12}{5}$?



Мал. 211

797. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута M трикутника MNP ($\angle P = 90°$), якщо $MP = 24$ см, $MN = 25$ см.

798. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 8 см і 15 см. Знайдіть:

1) синус гострого кута, що лежить проти меншого катета;

2) косинус гострого кута, прилеглого до більшого катета;

3) тангенси обох гострих кутів.

799. Радіус кола, описаного навколо прямокутника, дорівнює R. Діагональ прямокутника утворює зі стороною кут α. Знайдіть периметр прямокутника.

800. Кут ромба дорівнює 80°, а діагональ, що лежить проти цього кута, – 10 см. Знайдіть (з точністю до сотих см) периметр ромба.

801. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, CK – висота, $CA = b$, $\angle A = \alpha$. Знайдіть CK і KB.

802. У рівнобедреному трикутнику синус кута при основі дорівнює 0,96, а основа – 28 см. Знайдіть бічну сторону.

803. Радіус кола, вписаного у прямокутний трикутник, дорівнює r, а один з його гострих кутів – β. Знайдіть катет, прилеглий до цього гострого кута.

804. Основи трапеції дорівнюють 14 см і 10 см, кути при більшій основі дорівнюють 60° і 30°. Знайдіть висоту і діагоналі трапеції.

805. З точки до прямої проведено дві похилі, що утворюють з прямою кути 30° і 60°. Знайдіть відстань від точки до прямої, якщо відстань між основами похилих дорівнює a см. Скільки випадків треба розглянути?

806. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$. Доведіть, що $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. (Запис $\sin^2 A$ є тотожним запису $(\sin A)^2$.)

До § 21

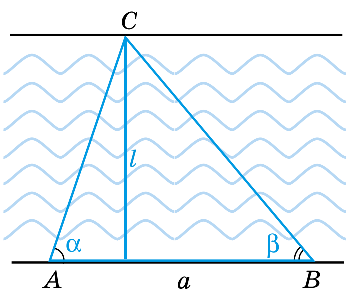
807. За двома елементами прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) знайдіть інші його сторони та кути:

1) $AB = 7$ см; $\angle A = 19°$;
2) $AB = 20$ дм; $\angle B = 48°$;
3) $BC = 5$ см; $\angle B = 57°$;
4) $AC = 18$ дм; $\angle B = 32°$.

808. За двома сторонами прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) знайдіть його третю сторону та гострі кути:

1) $AC = 9$ см; $BC = 12$ см;
2) $AC = 7$ дм; $BC = 5$ дм;
3) $AB = 34$ см; $BC = 30$ см;
4) $AB = 8$ дм; $AC = 7$ дм.

809. Для визначення ширини l річки взяли два будинки A і B на одному березі та будинок C на другому (мал. 212), $AB = a$ м, $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$. Знайдіть ширину річки.



Мал. 212

Розділ 4 МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** поняття многокутника і його площі; формули для обчислення площ прямокутників і квадрата;
- **дізнаєтеся**, як обчислити суму кутів многокутника, площу паралелограма, ромба, трикутника, трапеції;
- **навчитеся** застосовувати вивчені поняття, властивості та формули до розв'язування задач.

§ 22. МНОГОКУТНИК І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ. СУМА КУТІВ ОПУКЛОГО МНОГОКУТНИКА. МНОГОКУТНИК, ВПИСАНИЙ У КОЛО, І МНОГОКУТНИК, ОПИСАНИЙ НАВКОЛО КОЛА

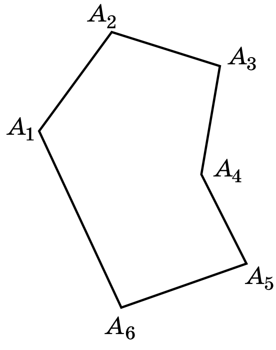
Розглянемо фігуру $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, зображену на малюнку 213. Вона складається з відрізків A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6 і A_6A_1. При цьому відрізки розміщені так, що *сусідні (суміжні) відрізки* (A_1A_2 і A_2A_3, A_2A_3 і A_3A_4, ..., A_6A_1 і A_1A_2) не лежать на одній прямій, а *несусідні (несуміжні) відрізки* не мають спільних точок. Таку фігуру називають ***многокутником***. Точки A_1, A_2, ..., A_6 називають ***вершинами многокутника***, а відрізки A_1A_2, A_2A_3, ... A_6A_1 – ***сторонами многокутника***.

Очевидно, що кількість вершин многокутника дорівнює кількості його сторін.

Суму довжин усіх сторін многокутника називають його ***периметром***.

Найменша кількість вершин (сторін) у многокутника – три. У цьому випадку маємо трикутник. Також окремим видом многокутника є чотирикутник.

Многокутник, що має n вершин, називають *n-кутником*. На малюнку 213 зображено шестикутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

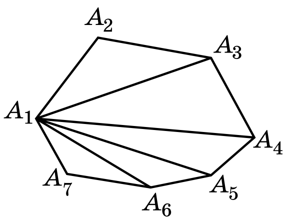


Мал. 213

Дві сторони многокутника називають *сусідніми*, якщо вони мають спільну вершину. Якщо сторони многокутника спільної вершини не мають, їх називають *несусідніми*. Так, наприклад, сторони A_1A_2 і A_1A_6 – сусідні, а A_1A_2 і A_4A_5 – несусідні (мал. 213).

Дві вершини многокутника називають *сусідніми*, якщо вони належать одній стороні, якщо ж вершини многокутника не належать одній стороні, їх називають *несусідніми*. Так, наприклад, вершини A_1 і A_2 – сусідні, A_3 і A_6 – несусідні (мал. 213).

Відрізок, який сполучає дві несусідні вершини многокутника, називають *діагоналлю* многокутника. На малюнку 214 зображено діагоналі многокутника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, що виходять з вершини A_1: A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_1A_6.



Мал. 214

Задача 1. Скільки діагоналей має n-кутник?

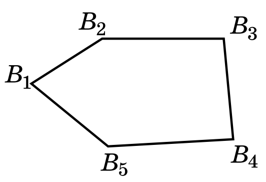
Р о з в' я з а н н я. З кожної вершини n-кутника виходить $(n - 3)$ діагоналі. Усіх вершин n, а кожна діагональ повторюється 2 рази, наприклад A_1A_3 і A_3A_1. Тому всіх діагоналей у n-кутнику буде $\frac{n(n-3)}{2}$.

В і д п о в і д ь. $\frac{n(n-3)}{2}$.

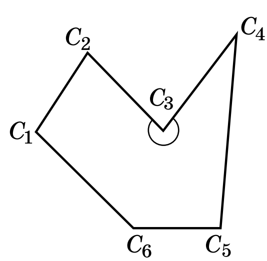
Кути, сторони яких містять сторони многокутника, називають *кутами многокутника*. П'ятикутник $B_1B_2B_3B_4B_5$ має кути $B_5B_1B_2$, $B_1B_2B_3$, $B_2B_3B_4$, $B_3B_4B_5$, $B_4B_5B_1$.

Якщо всі кути многокутника менші від розгорнутого кута, то многокутник називають ***опуклим***, якщо хоча б один кут многокутника більший за розгорнутий, то многокутник називають ***неопуклим***.

Многокутник $B_1B_2B_3B_4B_5$ – опуклий (мал. 215), а многокутник $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ – неопуклий (мал. 216), оскільки кут при вершині C_3 більший за 180°.



Мал. 215

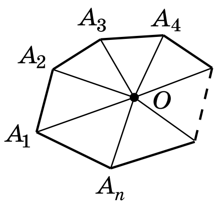


Мал. 216

Т е о р е м а (про суму кутів опуклого n-кутника). **Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n - 2)$.**

Д о в е д е н н я. Виберемо у внутрішній області многокутника довільну точку O і сполучимо її з усіма вершинами n-кутника (мал. 217). Одержимо n трикутників, сума всіх кутів яких дорівнює $180° \cdot n$. Сума кутів з вершиною в точці O дорівнює 360°. Сума кутів даного n-кутника дорівнює сумі кутів усіх трикутників без кутів з вершиною в точці O, тобто:

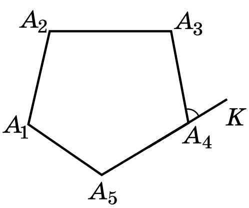
$$180°n - 360° = 180°(n - 2).$$ ▲



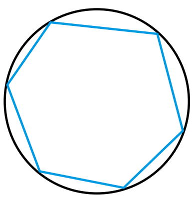
Мал. 217

Кути опуклого многокутника іноді називають ще його ***внутрішніми кутами***. Кут, суміжний з внутрішнім кутом многокутника, називають ***зовнішнім кутом многокутника***. На малюнку 218 кут A_3A_4K – зовнішній кут многокутника $A_1A_2A_3A_4A_5$ при вершині A_4.

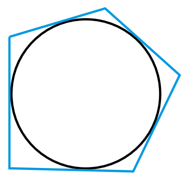
Очевидно, що кожний многокутник має по два зовнішніх кути при кожній вершині.



Мал. 218



Мал. 219



Мал. 220

Задача 2. Доведіть, що сума зовнішніх кутів будь-якого опуклого n-кутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.

Р о з в’ я з а н н я. Сума внутрішнього й зовнішнього кутів при кожній вершині многокутника дорівнює 180°. Тому сума всіх внутрішніх і зовнішніх кутів n-кутника дорівнює $180° \cdot n$. Оскільки сума внутрішніх кутів дорівнює $180°(n - 2)$, то сума зовнішніх кутів дорівнює:

$$180°n - 180°(n - 2) = 180°n - 180°n + 360° = 360°.$$ ▲

Многокутник **називають** ***вписаним у коло*****, якщо всі його вершини лежать на колі.** ***Коло*** **при цьому називають** ***описаним*** **навколо многокутника** (мал. 219).

Навколо многокутника не завжди можна описати коло. Якщо ж це можна зробити, то центром такого кола є точка перетину серединних перпендикулярів до сторін многокутника (як і у випадку трикутника).

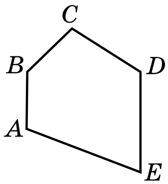
***Многокутник* називають *описаним навколо кола*, якщо всі його сторони дотикаються до кола. *Коло* при цьому називають *вписаним* у многокутник** (мал. 220).

Вписати коло можна не в кожний многокутник. Якщо ж це можна зробити, то центром такого кола є точка перетину бісектрис внутрішніх кутів многокутника (як і у випадку трикутника).

1. Яку фігуру називають многокутником?
2. Що називають вершинами, кутами, сторонами многокутника?
3. Що називають периметром многокутника?
4. Які сторони многокутника називають суміжними, які – несуміжними; які вершини – сусідніми, які – несусідніми?
5. Що називають діагоналлю многокутника?
6. Який многокутник називають опуклим, а який – неопуклим?
7. Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів опуклого n-кутника.
8. Що називають зовнішнім кутом опуклого многокутника?
9. Який многокутник називають вписаним у коло, а який – описаним навколо кола?

1 Початковий рівень

810. 1) Назвіть усі вершини, сторони, кути п’ятикутника $ABCDE$ (мал. 221).
2) Назвіть деяку пару сусідніх сторін, несусідніх сторін.
3) Назвіть деяку пару сусідніх вершин, несусідніх вершин.
4) Чи є п’ятикутник опуклим?



Мал. 221

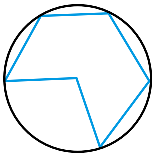
811. Накресліть опуклий шестикутник $ABCDEF$. Запишіть усі його вершини, сторони і кути.

812. Накресліть опуклий семикутник. $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ та проведіть у ньому всі діагоналі, що виходять з вершини A_5.

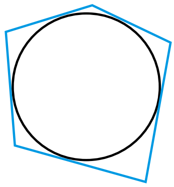
813. Накресліть будь-який неопуклий многокутник, у якого два кути більші за 180°.

814. Накресліть будь-який неопуклий п'ятикутник.

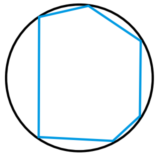
815. Знайдіть на малюнках 222–225 вписані та описані многокутники.



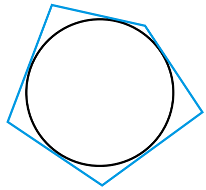
Мал. 222



Мал. 223



Мал. 224



Мал. 225

816. Накресліть коло та впишіть у нього п'ятикутник.

817. Накресліть коло та впишіть у нього будь-який многокутник.

818. Накресліть коло та опишіть навколо нього будь-який многокутник.

819. Накресліть коло та опишіть навколо нього шестикутник.

2 Середній рівень

820. Обчисліть суму кутів опуклого n-кутника, якщо:

1) $n = 12$; 2) $n = 18$.

821. Обчисліть суму кутів опуклого n-кутника, якщо:

1) $n = 7$; 2) $n = 22$.

822. В опуклому дев'ятикутнику всі кути між собою рівні. Знайдіть ці кути.

823. В опуклому шестикутнику всі кути між собою рівні. Знайдіть ці кути.

824. (Усно.) Чи можна побудувати опуклий п'ятикутник, усі кути якого між собою рівні? Відповідь поясніть.

825. (Усно.) Чотири кути одного опуклого п'ятикутника відповідно дорівнюють чотирьом кутам другого опуклого п'ятикутника. Чи рівні між собою їх п'яті кути?

826. Чи може найменший кут опуклого п'ятикутника дорівнювати 110°?

827. Чи може найбільший кут опуклого шестикутника дорівнювати 115°?

3 Достатній рівень

828. Визначте кути опуклого шестикутника, якщо їх градусні міри відносяться як 3 : 4 : 5 : 5 : 6 : 7.

829. Знайдіть кути опуклого п'ятикутника, якщо кожен з них, починаючи з другого, більший за попередній на 10°.

830. Чи існує опуклий многокутник, у якого сума кутів дорівнює: 1) 1080°; 2) 2100°? Якщо так, то знайдіть, скільки в нього сторін і скільки діагоналей.

831. Чи існує опуклий многокутник, у якого сума кутів дорівнює: 1) 2500°; 2) 1260°? Якщо так, то знайдіть, скільки в нього вершин і скільки діагоналей.

832. Кожен із зовнішніх кутів многокутника дорівнює 30°. Знайдіть кількість його сторін.

833. Усі зовнішні кути многокутника – прямі. Визначте вид цього многокутника.

4 Високий рівень

834. Чи існує многокутник, у якого кількість діагоналей дорівнює кількості сторін?

835. Сума внутрішніх кутів многокутника в 5 разів більша за суму його зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині. Скільки вершин у многокутника?

836. Знайдіть кількість сторін опуклого многокутника, якщо сума його зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині, на 1980° менша від суми внутрішніх кутів.

837. В опуклому п'ятикутнику $ABCDE$ вершину B сполучено рівними між собою діагоналями з двома іншими вершинами. Відомо, що $\angle BEA = \angle BDC$, $\angle ABE = \angle CBD$. Порівняйте периметри чотирикутників $ABDE$ і $BEDC$.

Вправи для повторення

3 **838.** AK і BM – висоти гострокутного трикутника ABC. Використовуючи подібність трикутників, доведіть, що $AK \cdot BC = AC \cdot BM$.

4 **839.** Навколо кола описано трапецію, периметр якої дорівнює P см. Знайдіть середню лінію цієї трапеції.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

840. Знайдіть площу прямокутника зі сторонами:

1) 5 см і 9 см; 2) 2,1 дм і 0,8 дм;
3) 7 см і 1 дм; 4) 4,1 дм і 0,32 м.

841. Знайдіть площу квадрата, сторона якого дорівнює:

1) 7 см; 2) 29 мм; 3) 4,5 мм; 4) $\frac{5}{8}$ м.

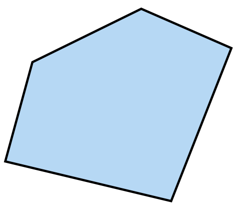
Цікаві задачі для учнів неледачих

842. (*Національна олімпіада Бразилії, 1983 р.*) Доведіть, що всі точки кола можна розбити на дві множини так, що серед вершин будь-якого вписаного в коло прямокутного трикутника знайдуться точки з обох множин.

§ 23. ПОНЯТТЯ ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКА. ПЛОЩА ПРЯМОКУТНИКА

Будь-який многокутник обмежує деяку частину площини. Цю частину площини називають *внутрішньою областю многокутника*. На малюнку 226 внутрішню область многокутника зафарбовано. Будемо розглядати многокутник разом з його внутрішньою областю.

Кожному многокутнику можна поставити у відповідність значення його *площі*, вважаючи, що площа многокутника – це та частина площини, яку займає многокутник. Поняття площі нам відомо з повсякденного життя (площа кімнати, площа городу, площа аркуша). Також з поняттям площі ви ознайомилися на уроках математики у 5–6-х класах.



Мал. 226

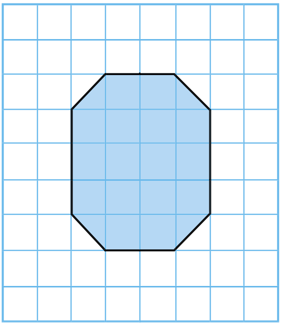
Сформулюємо *основні властивості площі*:

1) площа кожного многокутника є додатним числом;
2) рівні між собою многокутники мають рівні площі;
3) якщо многокутник розбито на кілька многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників;
4) одиницею вимірювання площі є площа квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці вимірювання довжини (такий квадрат ще називають *одиничним квадратом*).

Наприклад, якщо за одиницю вимірювання довжини взяти 1 см, то відповідною одиницею вимірювання площі буде площа квадрата зі стороною 1 см. Такий квадрат має площу 1 см^2 (читається: *один квадратний сантиметр*). Іншими одиницями вимірювання площі є 1 мм^2; 1 дм^2; 1 м^2; 1 км^2. Для площ ділянок землі використовують одиниці вимірювання *ар* і *гектар*: 1 а = 100 м^2; 1 га = 100 а = 10 000 м^2.

Площу фігури прийнято позначати літерою S.

Задача 1. Знайдіть площу многокутника, зображеного на малюнку 227, якщо сторона клітинки дорівнює 1 см.



Мал. 227

Р о з в' я з а н н я. Внутрішня область многокутника складається з шістнадцяти клітинок зі стороною завдовжки 1 см, площа кожної з яких – 1 см^2, і чотирьох трикутників, площа кожного з яких дорівнює половині площі клітинки. Отже, площа фігури

$$S = 16 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 18 \text{ (см}^2\text{)}.$$

В і д п о в і д ь. 18 см^2.

Площі деяких фігур можна знаходити за формулами. Наприклад, з попередніх класів нам відомо формули для обчислення площі прямокутника, квадрата, круга.

Т е о р е м а (про площу прямокутника). **Площа S прямокутника зі сторонами a і b обчислюється за формулою**

$$S = a \cdot b.$$

Доведення цієї теореми є досить громіздким, ознайомитися з ним можна у Додатку 2 (с. 194).

Якщо сторони прямокутника a = 1 дм і b = 6 см, то $S = 10 \cdot 6 = 60$ (см^2), а якщо $a = \sqrt{8}$ м і $b = \sqrt{2}$ м, $S = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$ (м^2).

Н а с л і д о к. **Площа S квадрата зі стороною a обчислюється за формулою $S = a^2$.**

Задача 2. Квадрат і прямокутник мають однакові площі. Сторона квадрата дорівнює 6 см, а одна зі сторін прямокутника в 4 рази більша за другу. Знайдіть периметр прямокутника.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $S_к$ – площа квадрата, $S_п$ – площа прямокутника, P – периметр прямокутника.

1) $S_к = S_п = 6^2 = 36$ (см^2).

2) Нехай одна зі сторін прямокутника дорівнює x см, тоді друга дорівнює $4x$ см. За формулою площі прямокутника маємо рівняння:

$x \cdot 4x = 36$, тобто $4x^2 = 36$, звідки $x^2 = 9$.

Враховуючи, що $x > 0$, маємо: $x = 3$. Отже, сторони прямокутника дорівнюють 3 см і $4 \cdot 3 = 12$ (см).

3) $P = 2(3 + 12) = 30$ (см).

Відповідь. 30 см.

А ще раніше...

Дещо про вимірювання площ було відомо геометрам багато тисячоліть тому.

2–3 тисячі років до н. е. вавилоняни вже вміли обчислювати площі прямокутника і трапеції у квадратних одиницях. Еталоном обчислення площ для них був квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці довжини.

Для обчислення площ прямокутника, трикутника і трапеції давні єгиптяни 4000 років тому використовували ті самі формули, що й ми зараз.

У «Началах» Евклід не вживав термін «площа», оскільки під терміном «фігура» мав на увазі частину площини, що обмежена замкненою лінією, тобто площу. Евклід не подавав результат вимірювання площі числом, а порівнював площі різних фігур між собою, використовуючи термін «рівновеликі». Так, наприклад, у першій книзі «Начал» можна зустріти задачу 16: «Паралелограми, що знаходяться на рівних основах і між тими самими паралельними, рівновеликі. Доведіть!».

Як і інші вчені, Евклід досліджував питання перетворення одних фігур в інші, їм рівновеликі. Так, наприклад, він розв'язав задачу про побудову квадрата, рівновеликого даному многокутнику.

1. Поясніть, що таке площа многокутника.
2. Сформулюйте основні властивості площі.
3. Сформулюйте теорему про площу прямокутника та наслідок з неї.

1 Початковий рівень

843. Знайдіть площу квадрата, сторона якого дорівнює:

1) 2 см; 2) 4 дм; 3) 12 см; 4) 3 м.

844. Знайдіть площу квадрата, сторона якого дорівнює:

1) 5 см; 2) 7 дм; 3) 9 см; 4) 6 м.

845. Знайдіть площу прямокутника, сторони якого дорівнюють:
1) 5 см і 9 см; 2) 12 дм і 4 дм.

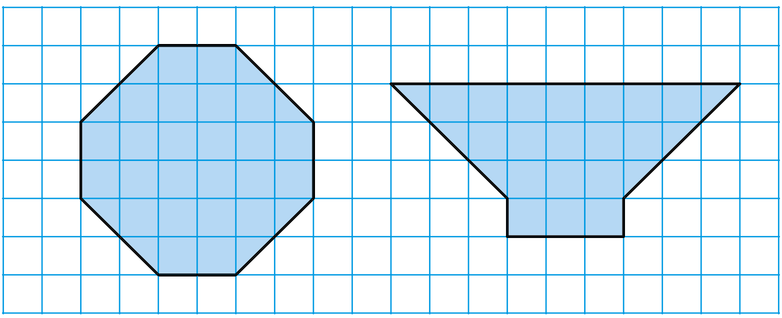
846. Знайдіть площу прямокутника, сторони якого дорівнюють:
1) 7 см і 6 см; 2) 10 дм і 5 дм.

847. Площа прямокутника дорівнює 12 см^2, а одна з його сторін – 4 см. Знайдіть другу сторону прямокутника.

848. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 5 см, а його площа – 20 см^2. Знайдіть другу сторону прямокутника.

2 Середній рівень

849. (Усно.) Знайдіть площі многокутників, зображених на малюнках 228 і 229, якщо сторона клітинки дорівнює 1 см.



Мал. 228 Мал. 229

850. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює:
1) 4 см^2; 2) 25 дм^2.

851. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює:
1) 9 дм^2; 2) 100 см^2.

852. Розміри футбольного поля 110×70 м. Більша чи менша за гектар його площа?

853. Квадрат і прямокутник мають рівні площі. Сторона квадрата дорівнює 4 см, а одна зі сторін прямокутника – 2 см. Знайдіть другу сторону прямокутника.

854. Прямокутник і квадрат мають рівні площі. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 4 см, а сторона квадрата – 8 см. Знайдіть другу сторону прямокутника.

855. Знайдіть площу прямокутника, одна зі сторін якого дорівнює 12 см, а діагональ – 13 см.

856. Діагональ прямокутника дорівнює 17 см, а одна з його сторін – 8 см. Знайдіть площу прямокутника.

3 Достатній рівень

857. Знайдіть площу квадрата, діагональ якого дорівнює: 1) 8 см; 2) d см.

858. Знайдіть площу квадрата, діагональ якого дорівнює $4\sqrt{2}$ см.

859. Периметр прямокутника 26 см, а одна з його сторін на 5 см більша за другу. Знайдіть сторону квадрата, що має таку саму площу, як і прямокутник.

860. Прямокутник і квадрат мають рівні площі. Периметр прямокутника дорівнює 50 см, а одна з його сторін на 15 см більша за другу. Знайдіть сторону квадрата.

861. Як зміниться площа прямокутника, якщо:

1) одну з його сторін збільшити вдвічі;

2) одну з його сторін зменшити втричі;

3) кожну зі сторін збільшити в 4 рази;

4) одну сторону збільшити вдвічі, а другу – у 5 разів;

5) одну зі сторін збільшити у 12 разів, а другу – зменшити вдвічі?

862. Як зміниться площа квадрата, якщо кожну з його сторін:

1) збільшити в 5 разів; 2) зменшити втричі?

863. (Усно.) Чи можуть два не рівних між собою квадрати мати рівні площі?

864. 1) Чи можуть два не рівних між собою прямокутники мати рівні площі?

2) Два прямокутники мають рівні площі. Чи можна стверджувати, що вони рівні?

3) Два прямокутники мають рівні площі. Чи можна стверджувати, що вони рівні, якщо одна зі сторін першого прямокутника дорівнює стороні другого?

865. Сторони квадратів 15 см і 17 см. Чому дорівнює сторона квадрата, площа якого дорівнює різниці площ даних квадратів?

866. Сторони квадратів 8 дм і 6 дм. Чому дорівнює сторона квадрата, площа якого дорівнює сумі площ даних квадратів?

867. Прямокутник, сторони якого 8 м і 6,5 м, розрізали на квадрати зі стороною 0,5 м. Скільки утворилося квадратів?

868. Знайдіть площу квадрата, описаного навколо кола, радіус якого r.

869. Знайдіть сторони прямокутника, якщо вони відносяться як 3 : 4, а площа дорівнює 108 см^2.

870. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 24 см^2, а одна зі сторін у 1,5 раза більша за другу.

871. Бісектриса AM кута прямокутника $ABCD$ поділяє сторону BC на відрізки $BM = 3$ см і $MC = 5$ см. Знайдіть площу прямокутника.

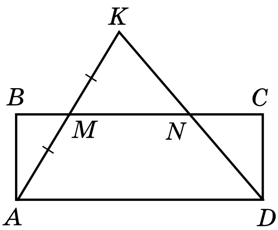
872. Бісектриса BK кута прямокутника $ABCD$ поділяє сторону AD на відрізки $AK = 7$ см і $KD = 5$ см. Знайдіть площу прямокутника.

873. Одна зі сторін прямокутника на 3 см більша за іншу, а діагональ прямокутника дорівнює 15 см. Знайдіть площу прямокутника.

874. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 7 см, а його діагональ на 1 см більша за іншу сторону. Знайдіть площу прямокутника.

4 Високий рівень

875. На малюнку 230 $ABCD$ – прямокутник, M – середина відрізка AK. Доведіть, що $S_{ABCD} = S_{AKD}$.



Мал. 230

876. Відношення площ двох квадратів дорівнює 5. Знайдіть відношення їх периметрів.

877. Відношення периметрів двох квадратів дорівнює 3. Знайдіть відношення їх площ.

Вправи для повторення

878. Сума кутів одного опуклого многокутника дорівнює сумі кутів іншого опуклого многокутника. Чи можна стверджувати, що многокутники мають однакову кількість сторін?

879. Доведіть, що навколо паралелограма, який не має прямих кутів, не можна описати коло.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

880. Накресліть будь-який паралелограм, у якого одна зі сторін дорівнює 5 см, а висота, що проведена до цієї сторони, – 3 см.

Цікаві задачі для учнів неледачих

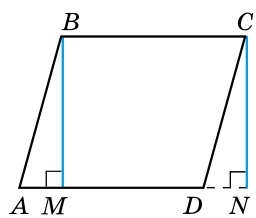
881. Центри трьох рівних між собою кіл є вершинами рівностороннього трикутника. Ці кола не мають спільних точок. Скільки існує кіл, які мають зовнішній або внутрішній дотик із трьома даними колами?

§ 24. ПЛОЩА ПАРАЛЕЛОГРАМА

Т е о р е м а (про площу паралелограма). **Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.**

Д о в е д е н н я. Нехай $ABCD$ – довільний паралелограм, BM – його висота (мал. 231). Доведемо, що площу S паралелограма можна обчислити за формулою $S = AD \cdot BM$.

1) Проведемо висоту CN до прямої, що містить сторону AD паралелограма $ABCD$.



Мал. 231

2) $\angle BAM = \angle CDN$ (як відповідні кути при паралельних прямих AB і CD та січній AN). Тому $\triangle BAM = \triangle CDN$ (за гіпотенузою і гострим кутом).

3) Паралелограм $ABCD$ складається з трапеції $MBCD$ і трикутника BAM, а прямокутник $MBCN$ з трапеції $MBCD$ і трикутника CDN. Оскільки трикутники BAM і CDN між собою рівні, то рівні і їх площі, а тому рівними є площі паралелограма $ABCD$ та прямокутника $MBCN$.

4) Площа прямокутника $MBCN$ дорівнює $MN \cdot BM$. Але $AM = DN$, а тому $MN = AD$. Отже, $S = AD \cdot BM$. ▲

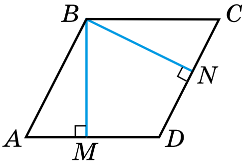
Зауважимо, що коли основа висоти BM – точка M – збігається з точкою D або лежить на продовженні сторони AD, то доведення теореми є аналогічним.

У загальному вигляді формулу площі S паралелограма можна записати так:

$$S = ah_a,$$

де a – сторона паралелограма, h_a – висота, проведена до неї.

Задача 1. Доведіть, що висоти ромба, проведені з однієї вершини, між собою рівні.



Мал. 232

Д о в е д е н н я. Нехай $ABCD$ – даний ромб, BM і BN – його висоти (мал. 232). Оскільки ромб є паралелограмом, то

$$S_{ABCD} = AD \cdot BM = DC \cdot BN.$$

Але $AD = DC$, тому $BM = BN$. ▲

Задача 2. Периметр паралелограма дорівнює 36 см, а його висоти – 4 см і 5 см. Знайдіть площу паралелограма.

Р о з в' я з а н н я. 1) Нехай $ABCD$ – даний паралелограм, $BM = 4$ см і $BN = 5$ см – його висоти (мал. 232).

2) $P_{ABCD} = 2(AD + DC)$. За умовою $2(AD + DC) = 36$, тому $AD + DC = 18$ (см).

3) Нехай $AD = x$ см, тоді $DC = (18 - x)$ см.

4) За формулами площі паралелограма:

$$S_{ABCD} = AD \cdot BM \text{ або } S_{ABCD} = DC \cdot BN.$$

Тому маємо рівняння: $x \cdot 4 = (18 - x) \cdot 5$.
Тобто $4x = 90 - 5x$; звідки $x = 10$ (см).
5) Тоді $S = 10 \cdot 4 = 40$ (см^2).
В і д п о в і д ь. 40 см^2. ▲

Сформулюйте і доведіть теорему про площу паралелограма.

1 Початковий рівень

882. Сторона паралелограма дорівнює a, h – висота, проведена до цієї сторони. Знайдіть площу паралелограма, якщо:
1) $a = 5$ см, $h = 7$ см; 2) $a = 8$ дм, $h = 4$ дм.

883. Сторона паралелограма дорівнює a, h – висота, проведена до цієї сторони. Знайдіть площу паралелограма, якщо:
1) $a = 6$ см, $h = 3$ см; 2) $a = 5$ дм, $h = 9$ дм.

884. Площа паралелограма дорівнює 24 см^2, а одна з його сторін – 6 см. Знайдіть висоту паралелограма, проведену до цієї сторони.

885. Площа паралелограма – 18 дм^2, а одна з його висот дорівнює 3 дм. Знайдіть довжину сторони, до якої проведено цю висоту.

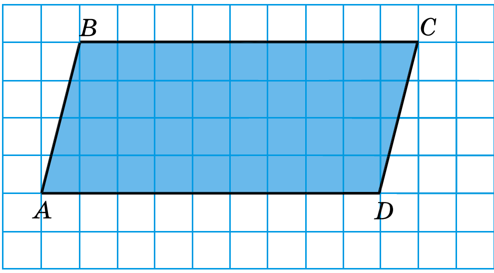
2 Середній рівень

886. Діагональ паралелограма завдовжки 5 см перпендикулярна до сторони паралелограма, що дорівнює 6 см. Знайдіть площу паралелограма.

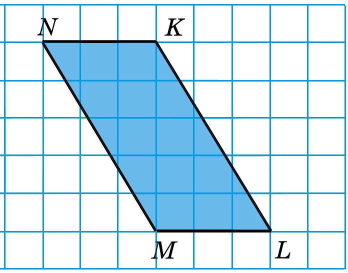
887. Сторона паралелограма завдовжки 8 см перпендикулярна до діагоналі паралелограма, що дорівнює 5 см. Знайдіть площу паралелограма.

888. Знайдіть площі фігур, зображених на малюнках 233 і 234, якщо сторона клітинки дорівнює 0,5 см.

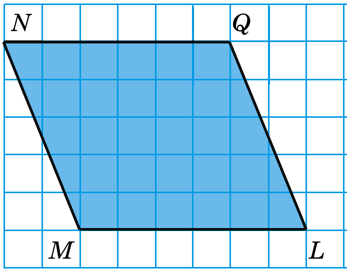
889. Знайдіть площі фігур, зображених на малюнках 235 і 236, якщо сторона клітинки дорівнює 0,5 см.



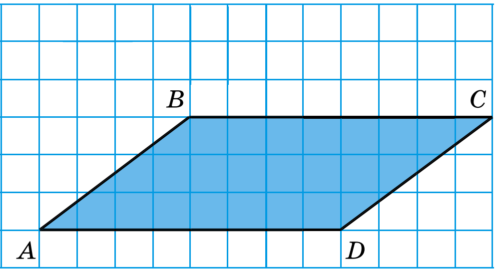
Мал. 233



Мал. 234



Мал. 235



Мал. 236

890. Одна зі сторін паралелограма дорівнює 6 см, а висота, проведена до другої сторони, – 4 см. Знайдіть периметр паралелограма, якщо його площа дорівнює 36 см^2.

891. Площа паралелограма дорівнює 48 см^2. Одна з його сторін – 8 см, а одна з висот – 4 см. Знайдіть периметр паралелограма.

3 Достатній рівень

892. Сторони паралелограма дорівнюють 4 см і 5 см. Висота, проведена до меншої сторони, дорівнює 3 см. Знайдіть висоту, проведену до більшої сторони.

893. Одна зі сторін паралелограма дорівнює 8 см, а висота, проведена до неї, – 6 см. Знайдіть другу сторону паралелограма, якщо висота, проведена до неї, дорівнює 4,8 см.

894. Сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 12 см, а його гострий кут – 30°. Знайдіть площу паралелограма.

895. Сторона ромба дорівнює 4 см, а один з його кутів – 150°. Знайдіть площу ромба.

896. Висота паралелограма втричі більша за сторону, до якої вона проведена. Знайдіть цю висоту, якщо площа паралелограма дорівнює 12 см^2.

897. Сторона паралелограма в 5 разів більша за висоту, проведену до неї. Знайдіть цю сторону, якщо площа паралелограма дорівнює 45 см^2.

898. Периметр ромба дорівнює P см. Знайдіть його площу, якщо одна з діагоналей ромба утворює зі стороною кут 75°.

4 Високий рівень

899. Дві сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 12 см, а сума двох його висот, проведених з однієї вершини, дорівнює 15 см. Знайдіть площу паралелограма.

900. Дві висоти паралелограма дорівнюють 2 см і 3 см, а сума двох його суміжних сторін – 10 см. Знайдіть площу паралелограма.

901. Висоти паралелограма дорівнюють 8 см і 6 см, а кут між ними – 30°. Знайдіть площу паралелограма.

902. Дві сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 5 см. Чи може його площа дорівнювати:

1) 41 см^2; 2) 40 см^2; 3) 39 см^2?

903. Сторони паралелограма дорівнюють 9 см і 12 см, а одна з його висот – 6 см. Знайдіть другу висоту паралелограма. Скільки розв'язків має задача?

Вправи для повторення

904. Сума кутів одного з многокутників на 540° більша за суму кутів другого многокутника. На скільки більше вершин у першого многокутника, ніж у другого?

905. Середини сторін ромба послідовно сполучено відрізками. Обчисліть площу чотирикутника, що утворився, якщо діагоналі ромба дорівнюють 6 см і 10 см.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

906. Накресліть два нерівних між собою трикутники, у кожного з яких одна зі сторін дорівнює 4 см, а висоти, проведені до цих сторін, – 2,5 см.

Цікаві задачі для учнів неледачих

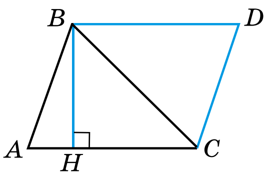
907. (*Задача ал-Кораджи.*) Знайдіть площу прямокутника, основа якого вдвічі більша за висоту, а площа чисельно дорівнює периметру[1].

§ 25. ПЛОЩА ТРИКУТНИКА

Т е о р е м а (про площу трикутника). **Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.**

Д о в е д е н н я. Нехай ABC – довільний трикутник, BH – його висота (мал. 237). Доведемо, що

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH.$$



Мал. 237

1) Проведемо через вершину B пряму, паралельну AC, а через вершину C – пряму, паралельну AB. Одержимо паралелограм $ABDC$.

2) $\triangle ABC = \triangle DCB$ (за трьома сторонами). Тому

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC}, \text{ звідки } S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

[1] Основою і висотою ал-Кораджи називав дві сторони прямокутника.

3) Оскільки $S_{ABCD} = AC \cdot BH$, то $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$. ▲

У загальному вигляді формулу площі трикутника S можна записати так:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} a h_a,}$$

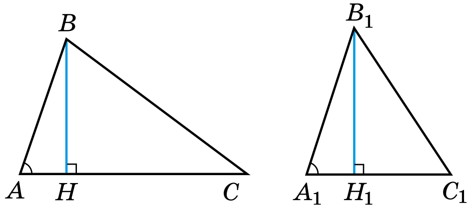
де a – сторона трикутника, h_a – висота, проведена до неї.

Наслідок 1. **Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку катетів.**

Наслідок 2. **Якщо сторона одного трикутника дорівнює стороні другого, то площі таких трикутників відносяться як їх висоти, проведені до цих сторін.**

Наслідок 3. **Якщо висота одного трикутника дорівнює одній з висот другого трикутника, то площі цих трикутників відносяться як сторони, до яких проведено ці висоти.**

Задача 1. Доведіть, що коли кут одного трикутника дорівнює куту другого трикутника, то площі цих трикутників відносяться як добутки сторін, що утворюють цей кут.



Мал. 238

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$. Проведемо висоти BH і B_1H_1 (мал. 238).

1) Маємо:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BH}{\frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1H_1} = \frac{AC \cdot BH}{A_1C_1 \cdot B_1H_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{BH}{B_1H_1}.$$

2) $\triangle ABH \sim \triangle A_1B_1H_1$ (як прямокутні, за гострим кутом). Тому $\frac{BH}{B_1H_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

3) Маємо: $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC \cdot AB}{A_1C_1 \cdot A_1B_1}$. ▲

Задача 2. Знайдіть площу рівностороннього трикутника зі стороною a.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $\triangle ABC$ – рівносторонній зі стороною завдовжки a.

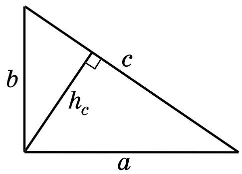
Тоді $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a$. У рівносторонньому трикутнику $h_a = m_a$, де m_a – медіана. Але $m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (§ 18, задача 4), тому і $h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Отже, $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

В і д п о в і д ь. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Задача 3. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 15 см і 17 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до найбільшої його сторони.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки $17^2 = 8^2 + 15^2$ $(289 = 289)$, то за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, трикутник є прямокутним. Прямий кут лежить проти сторони, що дорівнює 17 см.

Скористаємося малюнком 239. Нехай $c = 17$ см – гіпотенуза, $b = 8$ см і $a = 15$ см – катети трикутника, h_c – його висота. Знайдемо h_c.



Мал. 239

Площу даного трикутника можна знайти за формулами: $S = \frac{1}{2}a \cdot b$ або $S = \frac{1}{2}c \cdot h_c$.

Тоді $\frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$, тобто $ab = ch_c$, звідки $h_c = \frac{ab}{c}$.

Отже, маємо: $h_c = \frac{8 \cdot 15}{17} = 7\frac{1}{17}$ (см).

В і д п о в і д ь. $7\frac{1}{17}$ см.

1. Сформулюйте і доведіть теорему про площу трикутника.
2. Сформулюйте наслідки з теореми про площу трикутника.

Початковий рівень

908. Сторона трикутника дорівнює a, h – висота, проведена до цієї сторони. Знайдіть площу трикутника, якщо:
1) $a = 10$ см, $h = 5$ см; 2) $a = 3$ дм, $h = 5$ дм.

909. Нехай a – сторона трикутника, h – висота, проведена до цієї сторони. Знайдіть площу трикутника, якщо:
1) $a = 6$ дм, $h = 4$ дм; 2) $a = 7$ см, $h = 1$ см.

910. Знайдіть площу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють:

1) 4 см і 3 см; 2) 9 дм і 5 дм.

911. Знайдіть площу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють:

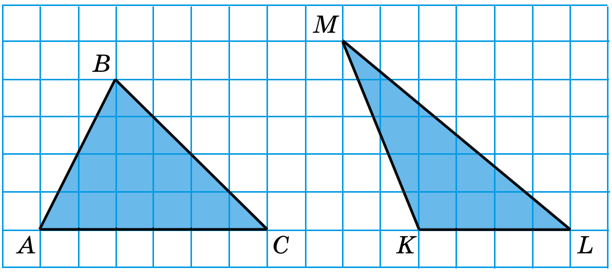
1) 6 см і 5 см; 2) 7 дм і 3 дм.

2 Середній рівень

912. Площа трикутника дорівнює 36 дм^2, а одна з його висот – 8 дм. Знайдіть довжину сторони, до якої проведено цю висоту.

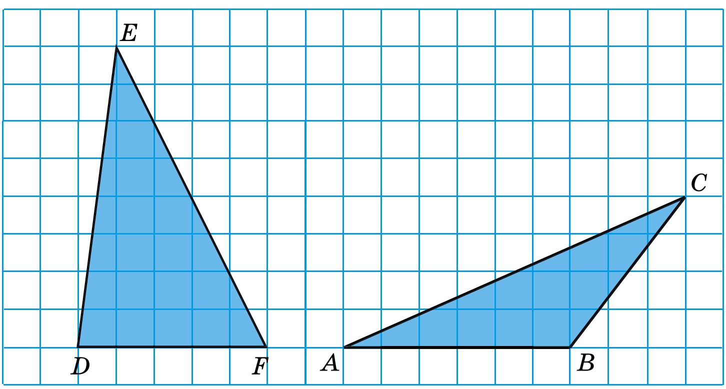
913. Площа трикутника дорівнює 20 см^2, а одна з його сторін – 8 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до цієї сторони.

914. Знайдіть площі фігур, зображених на малюнках 240 і 241, якщо сторона клітинки дорівнює 0,5 см.



Мал. 240 Мал. 241

915. Знайдіть площі фігур, зображених на малюнках 242 і 243, якщо сторона клітинки дорівнює 0,5 см.



Мал. 242 Мал. 243

916. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 5 см, а висота, проведена до основи, – 3 см. Знайдіть площу трикутника.

917. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 7 см, а гіпотенуза – 25 см. Знайдіть площу трикутника.

3 Достатній рівень

918. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 8 см. Знайдіть площу трикутника.

919. Висота рівнобедреного прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 6 см. Знайдіть площу трикутника.

920. 1) Діагоналі ромба дорівнюють 8 см і 10 см. Знайдіть площу ромба.

2) Використовуючи формулу площі прямокутного трикутника, виведіть формулу площі ромба через його діагоналі d_1 і d_2.

921. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 12 см і 6 см.

922. У прямокутнику $ABCD$ $BD = 10$ см. Вершина B віддалена від прямої AC на 3 см. Знайдіть площі трикутника ABC і прямокутника $ABCD$.

923. Сторона трикутника вдвічі більша за висоту, проведену до неї. Знайдіть цю сторону, якщо площа трикутника дорівнює 16 см^2.

924. Висота трикутника у 4 рази більша за сторону, до якої вона проведена. Знайдіть цю висоту, якщо площа трикутника дорівнює 18 см^2.

925. На стороні AC трикутника ABC, площа якого дорівнює 12 см^2, узято точку D так, що $AD : DC = 1 : 2$. Знайдіть площі трикутників ABD і DBC.

926. На стороні AB трикутника ABC, площа якого дорівнює 20 см^2, узято точку K так, що $AK : KB = 1 : 3$. Знайдіть площі трикутників ACK і CKB.

927. $ABCD$ – трапеція, $AD \parallel BC$. Доведіть, що $S_{ACD} = S_{ABD}$.

928. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки 4 см і 1 см, починаючи від вершини кута між бічними сторонами. Знайдіть площу трикутника.

929. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки 4 см і 6 см, починаючи від вершини при основі. Знайдіть площу трикутника.

930. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи.

931. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 24 см. Знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи.

4 Високий рівень

932. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки 9 см і 6 см. Знайдіть площу трикутника.

933. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить катет на відрізки 3 см і 5 см. Знайдіть площу трикутника.

934. Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 6 см. Чи може площа трикутника дорівнювати:

1) 11 см^2; 2) 12 см^2; 3) 13 см^2?

935. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, яка є серединою відрізка AB. Знайдіть відношення площ трикутників AOC і BOD, якщо $CO = 3$ см, $DO = 6$ см.

936. MN – середня лінія трикутника ABC, $M \in AB$, $N \in AC$. Знайдіть відношення площ трикутників AMN і ABC.

Вправи для повторення

2 **937.** Навколо кола, радіус якого дорівнює 3 см, описано квадрат. Знайдіть периметр і площу квадрата.

3 **938.** Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ у відношенні 1 : 2. Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр дорівнює 48 см.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

939. Накресліть трапецію, основи якої дорівнюють 5 см і 3 см, а висота – 4 см.

Цікаві задачі для учнів неледачих

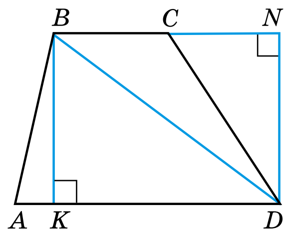
940. Стіна заввишки 3,5 м відкидає тінь завдовжки 5 м. Олександр Семенович, зріст якого 1 м 75 см, стоїть на відстані 10 м від краю тіні. Яку найменшу кількість кроків він має зробити, щоб повністю потрапити в тінь, якщо довжина його кроку 0,5 м?

§ 26. ПЛОЩА ТРАПЕЦІЇ

Т е о р е м а (про площу трапеції). **Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту.**

Д о в е д е н н я. Нехай $ABCD$ – довільна трапеція з основами AD і BC, BK – її висота (мал. 244). Доведемо, що площу трапеції S можна знайти за формулою:

$$S = \frac{AD+BC}{2} \cdot BK.$$



Мал. 244

1) Діагональ BD розбиває трапецію на два трикутники ABD і BDC. Тому $S = S_{ABD} + S_{BDC}$.

2) BK – висота трикутника ABD, тому $S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BK$.

3) Проведемо у трапеції висоту DN, вона є і висотою трикутника BDC, тому $S_{BDC} = \frac{1}{2} BC \cdot DN$.

4) $DN = BK$ (як висоти трапеції). Отже,

$$S = S_{ABD} + S_{BDC} = \frac{1}{2} AD \cdot BK + \frac{1}{2} BC \cdot DN = \frac{AD \cdot BK}{2} + \frac{BC \cdot BK}{2} =$$

$$= (AD+BC) \cdot \frac{BK}{2} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BK. \blacktriangle$$

У загальному вигляді формулу площі трапеції S можна записати так:

$$\boldsymbol{S = \frac{a+b}{2} h},$$

де a і b – основи трапеції, h – її висота.

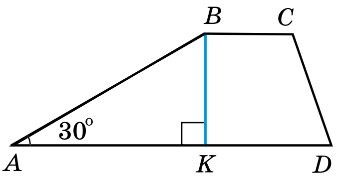
Н а с л і д о к. **Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії на висоту.**

Задача 1. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$), $AD = 8$ см, $BC = 5$ см, $AB = 12$ см, $\angle A = 30°$. Знайдіть площу трапеції.

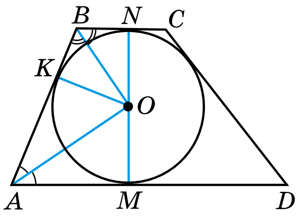
Р о з в' я з а н н я. 1) Проведемо у трапеції $ABCD$ висоту BK (мал. 245). У $\triangle ABK$ ($\angle K = 90°$) $BK = \frac{AB}{2}$ (за властивістю катета, що лежить проти кута 30°). Отже, $BK = \frac{12}{2} = 6$ (см).

2) $S_{ABCD} = \dfrac{AD+BC}{2} \cdot BK = \dfrac{8+5}{2} \cdot 6 = 39$ (см^2).

В і д п о в і д ь. 39 см^2.



Мал. 245



Мал. 246

Задача 2. Периметр трапеції 60 см, а точка дотику вписаного кола ділить одну з бічних сторін на відрізки 9 см і 4 см. Знайдіть площу трапеції.

Р о з в' я з а н н я. 1) Оскільки трапецію описано навколо кола (мал. 246), то

$$AD + BC = AB + CD = \frac{P}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ (см)}.$$

2) Центр вписаного кола – точка O – є точкою перетину бісектрис кутів трапеції, отже, і кутів BAD і ABC. Тому $\angle AOB = 90°$ (див. задачу 214).

3) Точка K – точка дотику кола до сторони AB, тому $OK \perp AB$. Отже, OK – радіус кола і висота прямокутного трикутника BOA, проведена до гіпотенузи. За теоремою про середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику маємо: $OK^2 = AK \cdot KB = 9 \cdot 4 = 36$, звідки $OK = 6$ (см).

4) MN – діаметр кола, а також висота трапеції, $MN = 2 \cdot OK = 2 \cdot 6 = 12$ (см).

5) Отже, $S_{ABCD} = \dfrac{AD+BC}{2} \cdot MN = \dfrac{30}{2} \cdot 12 = 180$ (см^2).

В і д п о в і д ь. 180 см^2.

1. Сформулюйте і доведіть теорему про площу трапеції.
2. Сформулюйте наслідок із цієї теореми.

1 Початковий рівень

941. Нехай a і b – основи трапеції, h – її висота. Знайдіть площу трапеції, якщо:

1) $a = 5$ см, $b = 7$ см, $h = 4$ см;
2) $a = 9$ дм, $b = 1$ дм, $h = 5$ дм.

942. Нехай a і b – основи трапеції, h – її висота. Знайдіть площу трапеції, якщо:
1) $a = 9$ см, $b = 3$ см, $h = 2$ см;
2) $a = 3$ дм, $b = 7$ дм, $h = 6$ дм.

943. Знайдіть площу трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 4 см, а висота – 5 см.

944. Висота трапеції дорівнює 3 см, а середня лінія – 6 см. Знайдіть площу трапеції.

2 Середній рівень

945. Основи трапеції дорівнюють 7 см і 13 см, а її площа – 40 см^2. Знайдіть висоту трапеції.

946. Площа трапеції дорівнює 36 см^2, а її основи – 8 см і 10 см. Знайдіть висоту трапеції.

947. Висота трапеції дорівнює 6 см, а її площа – 24 см^2. Знайдіть суму основ трапеції.

948. Висота трапеції дорівнює 8 см, а площа – 40 см^2. Знайдіть середню лінію трапеції.

949. Площа трапеції дорівнює 63 см^2, одна з її основ – 5 см, а висота – 7 см. Знайдіть другу основу трапеції.

950. Одна з основ трапеції дорівнює 17 см, а її висота – 3 см. Знайдіть другу основу трапеції, якщо її площа дорівнює 33 см^2.

951. $ABCD$ ($AD \parallel BC$) – рівнобічна трапеція з тупим кутом B, BK – її висота, $AK = 3$ см, $BC = 5$ см, $BK = 4$ см. Знайдіть площу трапеції.

952. $ABCD$ ($AB \parallel CD$) – прямокутна трапеція з тупим кутом D, DK – висота трапеції, $AK = 4$ см, $CD = 7$ см, $DK = 5$ см. Знайдіть площу трапеції.

3 Достатній рівень

953. Площа прямокутної трапеції дорівнює 30 см^2, її периметр – 28 см, а менша бічна сторона – 3 см. Знайдіть більшу бічну сторону.

954. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 32 см, її бічна сторона – 5 см, а площа – 44 см^2. Знайдіть висоту трапеції.

955. У трапеції $ABCD$ менша основа AB дорівнює 6 см, а висота трапеції – 8 см. Знайдіть площу трапеції, якщо площа трикутника ADC дорівнює 40 см^2.

956. У трапеції $ABCD$ основи AD і BC дорівнюють відповідно 10 см і 8 см. Площа трикутника ABD дорівнює 25 см^2. Знайдіть площу трапеції.

957. Площа трапеції дорівнює 36 см^2, а її висота – 6 см. Знайдіть основи трапеції, якщо вони відносяться як 1 : 3.

958. Основи трапеції відносяться як 1 : 4. Знайдіть ці основи, якщо висота трапеції дорівнює 4 см, а площа трапеції – 50 см^2.

959. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють a см і b см, а бічна сторона завдовжки c см утворює з меншою основою кут 150°.

960. У прямокутній трапеції менша основа дорівнює 6 см і утворює з меншою діагоналлю кут 45°. Знайдіть площу трапеції, якщо її тупий кут дорівнює 135°.

961. У прямокутній трапеції менша бічна сторона дорівнює 4 см і утворює з меншою діагоналлю кут 45°. Гострий кут трапеції також дорівнює 45°. Знайдіть площу трапеції.

962. Більша діагональ прямокутної трапеції дорівнює 13 см, а більша основа – 12 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 4 см.

963. Більша діагональ прямокутної трапеції дорівнює 17 см, а висота – 8 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 5 см.

964. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 38 см і 52 см, а бічна сторона – 25 см. Знайдіть площу трапеції.

965. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 18 см, бічна сторона – 13 см, а висота – 12 см. Знайдіть площу трапеції.

966. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює 6 см, бічна сторона – 5 см, а висота – 3 см. Знайдіть площу трапеції.

4 Високий рівень

967. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює 10 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 2 см і 3 см. Знайдіть площу трапеції.

968. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 18 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 5 см і 6 см. Знайдіть площу трапеції.

969. Діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, а висота дорівнює h см. Знайдіть площу трапеції.

970. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, діагоналі якої взаємно перпендикулярні, а основи дорівнюють 10 см і 4 см.

971. Точка дотику кола, вписаного у прямокутну трапецію, ділить більшу бічну сторону на відрізки 1 см і 4 см. Знайдіть площу трапеції.

Вправи для повторення

972. Обчисліть суму кутів опуклого 17-кутника.

973. Скільки плиток квадратної форми зі стороною 20 см знадобиться, щоб викласти ними підлогу в кімнаті прямокутної форми, довжина якої 4,6 м, а ширина 3,4 м?

974. Один з кутів ромба на 120° більший за другий, а сторона ромба дорівнює 6 см. Знайдіть площу ромба.

Цікаві задачі для учнів неледачих

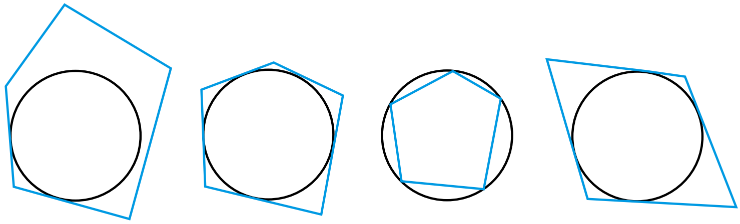
975. Із трьох квадратів, довжина сторони кожного з яких є цілим числом сантиметрів, складено прямокутник, площа якого 150 см^2. Знайдіть периметр прямокутника.

Домашня самостійна робота № 5

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. На якому з малюнків 247–250 зображено п’ятикутник, описаний навколо кола?

А. мал. 247; **Б.** мал. 248; **В.** мал. 249; **Г.** мал. 250.



Мал. 247 Мал. 248 Мал. 249 Мал. 250

2. Знайдіть площу прямокутника, сторони якого дорівнюють 7 см і 4 см.

А. 28 см; **Б.** 22 см; **В.** 28 см^2; **Г.** 11 см^2.

3. Знайдіть площу паралелограма, одна зі сторін якого дорівнює 8 см, а висота, проведена до цієї сторони, – 5 см.

А. 40 см^2; **Б.** 26 см^2; **В.** 20 см^2; **Г.** 13 см^2.

4. Обчисліть суму внутрішніх кутів опуклого 10-кутника.

А. 360°; **Б.** 1800°; **В.** 1620°; **Г.** 1440°.

5. Знайдіть сторону трикутника, якщо його площа дорівнює 24 см^2, а висота, проведена до цієї сторони, – 6 см.

А. 4 см; **Б.** 18 см; **В.** 8 см; **Г.** 12 см.

6. Одна з основ трапеції дорівнює 5 см, а її висота – 4 см. Знайдіть другу основу трапеції, якщо її площа дорівнює 28 см^2.

А. 11 см; **Б.** 2 см; **В.** 7 см; **Г.** 9 см.

7. Прямокутник, сторони якого дорівнюють 16 дм і 9,5 дм, розрізали на квадрати зі стороною 0,5 дм. Скільки отримали квадратів?

А. 612; **Б.** 608; **В.** 51; **Г.** 618.

8. Більша діагональ прямокутної трапеції дорівнює 13 см, а висота – 5 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 8 см.

А. 50 см^2; **Б.** 52,5 см^2; **В.** 100 см^2; **Г.** 62,5 см^2.

9. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 8 см і 10 см.

А. 80 см^2; **Б.** 20 см^2; **В.** 40 см^2; **Г.** 36 см^2.

10. У прямокутному трикутнику гіпотенуза точкою дотику вписаного кола ділиться на відрізки 3 см і 10 см. Знайдіть площу трикутника.

А. 60 см^2; **Б.** 50 см^2; **В.** 40 см^2; **Г.** 30 см^2.

11. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 12 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 2 см і 3 см. Знайдіть площу трапеції.

А. 75 см^2; **Б.** 50 см^2; **В.** 100 см^2; **Г.** 150 см^2.

12. Сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 9 см, а сума двох його висот, проведених з однієї вершини, – 7 см. Знайдіть площу паралелограма.

А. 108 см^2; **Б.** 48 см^2; **В.** 36 см^2; **Г.** 27 см^2.

Завдання для перевірки знань до § 22–26

1. Накресліть коло, впишіть у нього п’ятикутник та опишіть навколо нього семикутник.

2. Знайдіть площу прямокутника, сторони якого дорівнюють 6 см і 9 см.

3. Знайдіть площу паралелограма, одна зі сторін якого дорівнює 7 см, а висота, проведена до цієї сторони, – 4 см.

4. Обчисліть суму кутів опуклого 15-кутника.

5. Площа трикутника дорівнює 30 см^2, а одна з його сторін – 12 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до цієї сторони.

6. Площа трапеції дорівнює 35 см^2, одна з її основ – 8 см, а висота – 7 см. Знайдіть другу основу трапеції.

7. Прямокутник, сторони якого 12 дм і 7,5 дм, розрізали на квадрати зі стороною 0,5 дм. Скільки утворилося квадратів?

8. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 6 см і 12 см.

9. Менша основа трапеції дорівнює 12 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 3 см і 5 см. Знайдіть площу трапеції.

Додаткові завдання

10. Відношення площ двох квадратів дорівнює 7. Знайдіть відношення їх периметрів.

11. Висоти паралелограма дорівнюють 5 см і 6 см, а сума двох його суміжних сторін – 22 см. Знайдіть площу паралелограма.

Вправи для повторення розділу 4

До § 22

976. Накресліть опуклий п'ятикутник $A_1A_2A_3A_4A_5$ та неопуклий шестикутник $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$. Проведіть усі діагоналі в п'ятикутнику, обчисліть їх кількість.

977. Накресліть коло. Впишіть у нього та опишіть навколо нього будь-які многокутники з однаковою кількістю сторін.

978. Усі зовнішні кути п'ятикутника між собою рівні. Чому дорівнюють внутрішні кути цього п'ятикутника?

979. Знайдіть, скільки діагоналей у восьмикутника.

980. Усі внутрішні кути n-кутника дорівнюють по 135°. Знайдіть n.

981. Як зміниться сума внутрішніх кутів опуклого многокутника, якщо кількість його сторін збільшиться на дві?

982. Сума кутів опуклого n-кутника у k разів більша за суму кутів опуклого $(n - 1)$-кутника (k – натуральне число). Знайдіть k.

До § 23

983. Порівняйте площу квадрата зі стороною 6 см із площею прямокутника зі сторонами 4 см і 9 см.

984. 1) Накресліть довільний прямокутник, площа якого 12 см^2.

2) Накресліть квадрат, площа якого 9 см^2.

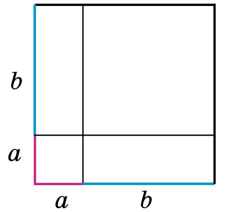
985. На продовженні сторони AD квадрата $ABCD$ за вершину A взято точку P, CP = 10 см, $\angle CPD$ = 30°. Знайдіть площу квадрата.

986. 1) Периметр квадрата дорівнює P см. Знайдіть його площу.

2) Площа квадрата дорівнює S см^2. Знайдіть його периметр.

3) Площа квадрата чисельно дорівнює його периметру. Знайдіть сторону квадрата.

987. На малюнку 251 зображено геометричне доведення формули $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Поясніть його.



Мал. 251

988. Скільки треба плиток прямокутної форми зі сторонами 30 см і 20 см, щоб викласти ними частину стіни, що має форму прямокутника зі сторонами 2,4 м і 3,6 м?

989. Бісектриса кута прямокутника ділить його сторону на відрізки 4 см і 5 см. Знайдіть площу цього прямокутника. Скільки розв'язків має задача?

990. У прямокутний трикутник ABC ($\angle C$ = 90°) вписано квадрат $MNKL$ так, що точки N і K належать гіпотенузі (причому N лежить між A і K), M належить AC, L належить BC. $AN = m$, $KB = n$. Знайдіть площу квадрата.

До § 24

991. Накресліть паралелограм, одна зі сторін якого дорівнює 4 см, а висота, проведена до неї, – 2 см. Знайдіть площу паралелограма.

992. Знайдіть площу ромба $ABCD$, у якого AB = 4 см, а висота, проведена до сторони BC, дорівнює 3 см.

993. У паралелограмі $ABCD$ $\angle B$ – тупий, CE – висота паралелограма, $\angle DCE$ = 60°, AD = 5 см, AB = 4 см. Знайдіть площу паралелограма.

994. Чи існує паралелограм, у якого:
1) сторони дорівнюють 6 см і 8 см, а висоти – 3 см і 4 см;
2) сторони дорівнюють 9 см і 6 см, а висоти – 4 см і 2 см?

995. Квадрат і ромб мають рівні між собою сторони, а тупий кут ромба дорівнює 150°. Яка з фігур має більшу площу? У скільки разів?

996. У паралелограмі $ABCD$ гострий кут дорівнює 30°, а бісектриса цього кута, перетинаючи сторону, ділить її навпіл. Знайдіть площу паралелограма, якщо його периметр дорівнює 24 см.

997. У ромб $ABCD$ вписано коло, радіус якого 8 см. K – точка дотику кола до сторони AB. Знайдіть площу ромба, якщо $AK : KB = 1 : 4$.

До § 25

998. Накресліть три різних трикутники (гострокутний, прямокутний і тупокутний), у кожного з яких одна зі сторін дорівнює 3 см, а висота, проведена до неї, – 4 см. Знайдіть площу кожного із трикутників.

999. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 9 см, а висота, проведена до більшої з них, – 4 см. Знайдіть висоту, проведену до меншої з них.

1000. У трикутнику ABC $\angle C = 135°$, $AC = 4$ см, BD – висота трикутника, $CD = 3$ см. Знайдіть площу трикутника.

1001. У трикутнику проведено всі середні лінії. Доведіть, що площа кожного із чотирьох трикутників, які утворилися, дорівнює $\frac{1}{4}$ площі початкового трикутника.

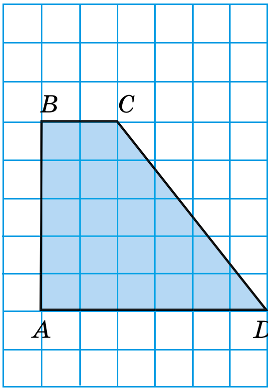
1002. CK – медіана рівнобедреного трикутника ABC з основою AB. На цій медіані вибрано деяку точку M. Доведіть, що $S_{AMC} = S_{BMC}$.

До § 26

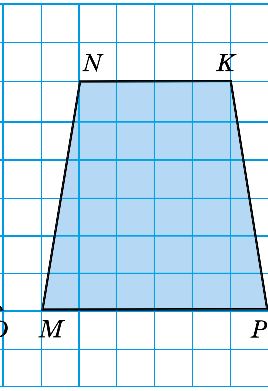
1003. Накресліть трапецію, основи якої 4 см і 2 см, а висота – 3 см. Знайдіть площу цієї трапеції.

1004. Площа трапеції дорівнює 32 см^2, а її середня лінія – 8 см. Знайдіть висоту трапеції.

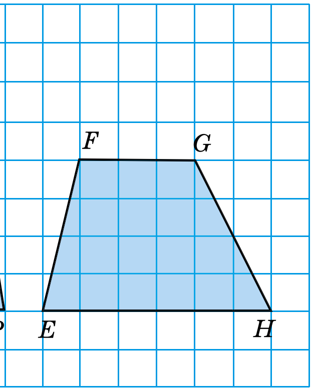
1005. Знайдіть площі трапецій, зображених на малюнках 252–254. Довжина однієї клітинки дорівнює 0,5 см.



Мал. 252



Мал. 253



Мал. 254

1006. Висоти, проведені з вершин меншої основи рівнобічної трапеції, ділять більшу основу на три відрізки, сума двох з яких дорівнює третьому. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа і висота дорівнюють по a см.

1007. Обчисліть площу прямокутної трапеції, у якої дві менші сторони дорівнюють по b см, а гострий кут – 45°.

1008. EF – середня лінія трикутника ABC, $EF \parallel AB$. У скільки разів площа трикутника CEF менша за площу трапеції $AEFB$?

1009. У рівнобічну трапецію вписано коло, яке ділить бічну сторону на відрізки довжиною 2 см і 8 см. Знайдіть площу трапеції.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ЗА КУРС ГЕОМЕТРІЇ 8 КЛАСУ

1

1. Знайдіть периметр паралелограма, сторони якого дорівнюють 4 см і 9 см.

2. Один з кутів ромба дорівнює 46°. Знайдіть інші кути ромба.

3. Знайдіть площу трикутника, одна зі сторін якого дорівнює 8 см, а висота, проведена до цієї сторони, – 5 см.

2

4. Середня лінія трапеції дорівнює 12 см. Знайдіть основи трапеції, якщо одна з них на 4 см більша за іншу.

5. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$; $AB = 4$ см; $AC = 6$ см; $A_1C_1 = 9$ см; $B_1C_1 = 12$ см. Знайдіть A_1B_1 і BC.

6. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 12 см і 10 см. Знайдіть довжину медіани, проведеної до меншого з катетів.

3

7. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см, $AB = 10$ см. Розв’яжіть цей трикутник (кути трикутника знайдіть із точністю до градуса).

8. Знайдіть сторони прямокутника, якщо вони відносяться як 2 : 3, а площа прямокутника дорівнює 96 см^2.

4

9. Точка дотику кола, вписаного у прямокутну трапецію, ділить більшу бічну сторону на відрізки 2 см і 8 см. Знайдіть площу трапеції.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Розділ 1
Чотирикутники

1010. На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ зовні нього побудовано два рівносторонніх трикутники ABK і CDL. Доведіть, що відрізок KL проходить через точку перетину діагоналей паралелограма.

1011. На основі AB рівнобедреного трикутника ABC взято довільну точку K. Через цю точку паралельно BC і AC проведено прямі, які перетинають сторони трикутника. Доведіть, що периметр паралелограма, який при цьому утворився, не залежить від положення точки K.

1012. Точки A, B і C лежать на колі із центром O. $ABCO$ – паралелограм. Знайдіть його кути.

1013. Побудуйте паралелограм за двома діагоналями і висотою.

1014. Діагоналі опуклого чотирикутника розбивають його на чотири трикутники, периметри яких однакові. Визначте вид чотирикутника.

1015. Коло з діаметром AC проходить через середину сторони AB ромба $ABCD$. Знайдіть тупий кут ромба.

1016. Зовні прямокутника $ABCD$ вибрано точку K так, що $\angle AKC = 90°$. Знайдіть $\angle DKB$.

1017. На катетах AC і BC прямокутного трикутника ABC побудовано квадрати $ACDE$ і $BCKL$. Прямі ED і KL перетинаються в точці P. Під яким кутом перетинаються прямі PC і AB?

1018. Сторони прямокутника дорівнюють a і b ($a > b$). Бісектриси чотирьох кутів прямокутника, перетинаючись, утворюють чотирикутник. Знайдіть його діагоналі.

1019. Доведіть, що бісектриса кута паралелограма ділить навпіл кут між висотами, проведеними з вершини цього кута.

1020. Усередині квадрата $ABCD$ узято точку P і на відрізку AP, як на стороні, побудовано квадрат $APNM$, сторона якого PN перетинає сторону AD квадрата $ABCD$. Порівняйте між собою відрізки BP і DM.

1021. Доведіть, що в будь-якій трапеції сума бічних сторін більша за різницю більшої і меншої основ.

1022. Відомо, що існує точка, рівновіддалена від усіх прямих, що містять сторони трапеції. Знайдіть периметр трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 10 см.

1023. Відомо, що існує точка, рівновіддалена від усіх вершин трапеції, один з кутів якої дорівнює 40°. Знайдіть інші кути трапеції.

1024. Основи трапеції дорівнюють a і b ($a > b$), а сума кутів, прилеглих до більшої основи, дорівнює 90°. Знайдіть відстань між серединами основ трапеції.

1025. Діагоналі чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, перетинаються в точці M. Відомо, що $\angle ABC = 73°$, $\angle BCD = 103°$, $\angle AMD = 110°$. Знайдіть $\angle ACD$.

1026. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AH_1, BH_2 і CH_3. H – точка їх перетину. Серед семи точок A, B, C, H_1, H_2, H_3 і H укажіть усі такі їх четвірки, через які можна провести коло.

Розділ 2
Подібність трикутників

1027. У п'ятикутнику $ABCDE$ всі кути однакові і всі сторони між собою рівні. Діагоналі AD і BE перетинаються в точці O. Доведіть, що $\triangle AED \sim \triangle AOE$.

1028. Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає продовження сторін CB і CD відповідно в точках N і M. Доведіть, що добуток $BN \cdot DM$ не залежить від того, як проведено цю пряму.

1029. Діагональ трапеції ділить її на два подібних трикутники. Визначте довжину цієї діагоналі, якщо основи трапеції дорівнюють a і b.

1030. Через середину найбільшої сторони трикутника проведено пряму, яка відтинає від нього трикутник, подібний даному. Знайдіть найменшу сторону трикутника, що відтинається, якщо сторони даного дорівнюють:
1) 42 см; 49 см; 56 см;
2) 42 см; 49 см; 63 см;
3) 42 см; 49 см; 70 см.
Скільки розв'язків має задача в кожному з випадків?

1031. У трикутнику ABC кут B – тупий. Позначте на стороні AC таку точку D, щоб виконувалася рівність $AB^2 = AD \cdot AC$.

1032. AD і BC – основи трапеції $ABCD$. Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. $AC = 15$ см, CE – висота трапеції, $AE = 9$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.

Розділ 3
Розв'язування прямокутних трикутників

1033. Діагоналі чотирикутника $ABCD$ взаємно перпендикулярні. Доведіть, що $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

1034. Точка M лежить усередині кута, який дорівнює $60°$. Відстані від точки M до сторін кута дорівнюють a і b. Знайдіть відстань від точки M до вершини кута.

1035. Два кола різних радіусів мають зовнішній дотик. MN – їх спільна зовнішня дотична, M і N – точки дотику. Доведіть, що довжина відрізка MN є середнім геометричним діаметрів кіл.

1036. 1) У гострокутному трикутнику ABC BH – висота. Доведіть, що $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$.

2) У трикутнику ABC $\angle A$ – тупий, BH – висота. Доведіть, що $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH$.

1037. У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику ділить гіпотенузу у відношенні $2 : 3$. Знайдіть периметр трикутника, якщо центр вписаного кола знаходиться на відстані $m\sqrt{2}$ від вершини прямого кута.

1038. Нехай a і b – катети прямокутного трикутника, c – його гіпотенуза, h – висота, проведена до гіпотенузи. Доведіть, що трикутник зі сторонами h, $c + h$ і $a + b$ – прямокутний.

1039. $ABCD$ – прямокутна трапеція, $\angle A = \angle B = 90°$, $AB = a$, $CD = b$, $BC = c$, $BC < DA$. Знайдіть відстань від точки B до прямої, що містить CD.

1040. Обчисліть: 1) $\sin 15°$; 2) $\sin 75°$.

Розділ 4
Многокутники. Площі многокутників

1041. Чи існує многокутник, у якого:

1) 20 діагоналей; 2) 21 діагональ?

1042. В опуклому n-кутнику п'ять кутів мають градусну міру $140°$ кожний, інші кути – гострі. Знайдіть n.

1043. Доведіть, що відстані від довільної точки діагоналі паралелограма до непаралельних сторін обернено пропорційні довжинам цих сторін.

1044. Усередині прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) узято точку M так, що площі трикутників AMB, BMC і CMA рівні між собою. Доведіть, що $MA^2 + MB^2 = 5MC^2$.

1045. У скільки разів площа трикутника ABC більша за площу трикутника ABM, де M – точка перетину медіан трикутника ABC?

1046. У трикутнику ABC h_1, h_2, h_3 – висоти, проведені відповідно до сторін AB, BC і CA, а d_1, d_2, d_3 – відстані від довільної точки P, що знаходиться всередині цього трикутника, до сторін AB, BC і CA відповідно. Доведіть, що $\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} = 1$.

1047. Точка перетину бісектрис трикутника на 3 см віддалена від прямої, що містить одну зі сторін трикутника. Знайдіть площу трикутника, якщо його периметр дорівнює 36 см.

1048. На сторонах AB, BC, AC трикутника ABC позначено точки M, K, P так, що $AM : MB = BK : KC = CP : PA = 2 : 1$. Площа трикутника ABC дорівнює S. Знайдіть площу чотирикутника $APKM$.

1049. Бісектриси всіх кутів трапеції перетинаються в точці O, яка знаходиться на відстані d від більшої сторони трапеції. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють m і n.

1050. AD і BC – основи трапеції $ABCD$, $CD = c$. Точка K – середина бічної сторони AB. Відстань від точки K до прямої, що містить сторону CD, дорівнює d. Знайдіть площу трапеції.

1051. У трапеції $ABCD$ M – середина більшої основи AD, $AB = BC = CD = a$. Точка перетину діагоналей трапеції збігається з точкою перетину висот трикутника BMC. Знайдіть площу трапеції.

ДОДАТОК 1

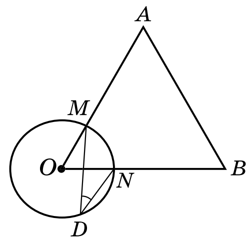
ГОТУЄМОСЯ ДО ЗНО

Розв'яжіть задачі, що пропонувалися на зовнішньому незалежному оцінюванні (ЗНО) з математики минулих років та охоплюють курс геометрії 8-го класу. У дужках вказано, у якому році це завдання пропонувалося на ЗНО.

До кожного із завдань 1, 2, 4, 6, 9 оберіть правильний варіант відповіді із п'яти запропонованих варіантів (А–Д). До кожного із завдань 3, 5, 7, 8, 10–13 відповідь запишіть.

Тема «ЧОТИРИКУТНИКИ»

1. (2011 р.) На малюнку зображено коло з центром у точці O і рівносторонній трикутник AOB, що перетинає коло в точках M і N. Точка D належить колу. Знайдіть градусну міру кута MDN.



А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	120°

2. (2015 р.) На діагоналі AC квадрата $ABCD$ задано точку, відстань від якої до сторін AB і BC дорівнює 2 см і 6 см відповідно. Визначте периметр квадрата $ABCD$.

А	Б	В	Г	Д
16 см	24 см	32 см	48 см	64 см

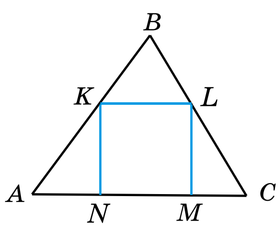
3. (2012 р.) Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає його більшу сторону BC в точці M. Визначте радіус кола (у см), описаного навколо прямокутника, якщо $BC = 24$ см, $AM = 10\sqrt{2}$ см.

Тема «ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ»

4. (2011 р.) У трикутнику ABC: $AB = 31$ см, $BC = 15$ см, $AC = 26$ см. Пряма a, паралельна стороні AB, перетинає сторони BC і AC у точках M і N відповідно. Обчисліть периметр трикутника MNC, якщо $MC = 5$ см.

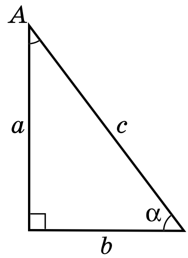
А	Б	В	Г	Д
15 см	24 см	48 см	21 см	26 см

5. (2013 р.) У трикутник ABC вписано квадрат $KLMN$ (див. малюнок). Висота цього трикутника, проведена до сторони AC, дорівнює 6 см. Знайдіть периметр квадрата (у см), якщо $AC = 10$ см.



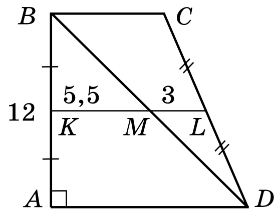
Тема **«РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ»**

6. (2015 р.) На малюнку зображено прямокутний трикутник з катетами a і b, гіпотенузою c та гострим кутом α. Укажіть правильну рівність.



А	Б	В	Г	Д
$\cos\alpha = \frac{a}{b}$	$\cos\alpha = \frac{c}{b}$	$\cos\alpha = \frac{a}{c}$	$\cos\alpha = \frac{c}{a}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

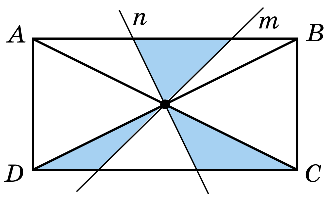
7. (2009 р.) У трапеції $ABCD$: $\angle A = 90°$, $AB = 12$ см (див. малюнок). Діагональ BD ділить середню лінію KL трапеції на відрізки KM і ML, причому $KM = 5{,}5$ см і $ML = 3$ см. Обчисліть периметр трапеції $ABCD$ (у см).



8. (2006 р.) (Задача Л. Пізанського, XII–XIII ст.). Дві вежі, одна з яких 40 футів, а друга – 30 футів заввишки, розташовано на відстані 50 футів одна від одної. До криниці, що знаходиться між ними, одночасно з обох веж злетіло по пташці. Рухаючись з однаковою швидкістю, вони прилетіли до криниці одночасно. Знайдіть відстань від криниці до найближчої вежі (*у футах*).

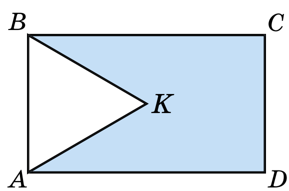
Тема **«МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ»**

9. (2006 р.) У прямокутнику $ABCD$ прямі m і n проходять через точку перетину діагоналей. Площа фігури, що складається з трьох зафарбованих трикутників, дорівнює 12 см^2. Обчисліть площу прямокутника $ABCD$.



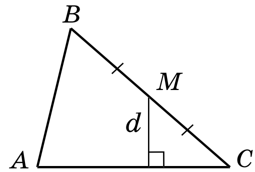
А	Б	В	Г	Д
24 см^2	30 см^2	36 см^2	42 см^2	48 см^2

10. (2010 р.) На малюнку зображено прямокутник $ABCD$ і равносторонній трикутник ABK, периметри яких відповідно дорівнюють 20 см і 12 см. Знайдіть периметр п'ятикутника $AKBCD$ (у см).



11. (2013 р.) Менша сторона прямокутника дорівнює 16 м і утворює з його діагоналлю кут 60°. Середини всіх сторін прямокутника послідовно сполучено. Знайдіть значення виразу $\frac{S}{\sqrt{3}}$, де S – площа (у м^2) утвореного чотирикутника.

12. (2013 р.) У трикутнику ABC точка M – середина сторони BC, $AC = 24$ см (див. малюнок). Знайдіть відстань d (у см) від точки M до сторони AC, якщо площа трикутника ABC дорівнює 96 см^2.



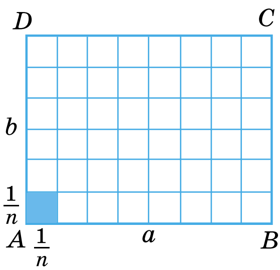
13. (2014 р.) Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки довжиною 13 см і 23 см. Обчисліть (*у см²*) площу трапеції.

ДОДАТОК 2

ТЕОРЕМА ПРО ПЛОЩУ ПРЯМОКУТНИКА

Теорема (про площу прямокутника). **Площа S прямокутника зі сторонами a і b обчислюється за формулою $S = a \cdot b$.**

Доведення. Нехай $ABCD$ – довільний прямокутник, у якого $AB = a$, $AD = b$ (мал. 255). Доведемо, що $S = ab$.



Мал. 255

1) Якщо довжини відрізків AB і AD є раціональними числами (цілими або дробовими), то існує відрізок такої довжини h, який можна відкласти ціле число разів і на відрізку AB, і на відрізку AD.

Зведемо числа a і b до спільного знаменника n. Матимемо: $a = \frac{p}{n}$, $b = \frac{q}{n}$. Тоді $h = \frac{1}{n}$. Маємо $a = ph$, $b = qh$. Розіб'ємо відрізок AB на p рівних частин завдовжки h, а AD – на q рівних частин завдовжки h. Через точки поділу проведемо прямі, паралельні сторонам прямокутника (мал. 255). Ці прямі розіб'ють увесь прямокутник на pq рівних між собою квадратів зі стороною $h = \frac{1}{n}$ (один з таких квадратів зафарбовано на малюнку 255). Оскільки одиничний квадрат вміщує рівно n^2 квадратів зі стороною $\frac{1}{n}$, то площа одного квадрата з такою стороною дорівнює $\frac{1}{n^2}$. Площа прямокутника дорівнює сумі площ усіх квадратів. Маємо:

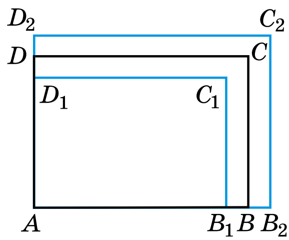
$$S = pq \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = ab.$$

2) Розглянемо випадок, коли хоч одна з довжин відрізків AB або AD є числом ірраціональним (нескінченним десятковим дробом).

Нехай число a_n одержали із числа a відкиданням усіх десяткових знаків після коми, починаючи з $(n + 1)$-го. Оскільки a відрізняється від a_n не більше ніж на $\frac{1}{10^n}$, то

$$a_n \leqslant a \leqslant a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Аналогічно розглянемо число b_n таке, що $b_n \leqslant b \leqslant b_n + \frac{1}{10^n}$. На прямих AB і AD відкладемо відрізки AB_1, AB_2, AD_1, AD_2, де $AB_1 = a_n$, $AB_2 = a_n + \frac{1}{10^n}$; $AD_1 = b_n$, $AD_2 = b_n + AD_2 = b_n + \frac{1}{10^n}$ і побудуємо прямокутники $AB_1C_1D_1$ і $AB_2C_2D_2$ (мал. 256). Тоді



Мал. 256

$$S_{AB_1C_1D_1} \leqslant S_{ABCD} \leqslant S_{AB_2C_2D_2};\ a_nb_n \leqslant S_{ABCD} \leqslant \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)\left(b_n + \frac{1}{10^n}\right).$$

Будемо необмежено збільшувати число n. Тоді число $\frac{1}{10^n}$ стає дуже малим, а тому число $a_n + \frac{1}{10^n}$ практично не відрізнятиметься від числа a_n, а число $b_n + \frac{1}{10^n}$ практично не відрізнятиметься від числа b_n. Тому добуток $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)\left(b_n + \frac{1}{10^n}\right)$ практично не відрізнятиметься від добутку a_nb_n. Отже, з останньої подвійної нерівності випливає, що площа прямокутника $ABCD$ практично не відрізняється від числа a_nb_n.

Тому $S = a_nb_n$.

Але з нерівностей $a_n \leqslant a \leqslant a_n + \frac{1}{10^n}$ і $b_n \leqslant b \leqslant b_n + \frac{1}{10^n}$ при необмеженому збільшенні числа n слідує, що число a практично не відрізняється від числа a_n, а число b – від числа b_n.

Отже, число a_nb_n практично не відрізняється від числа ab.

Остаточно маємо: $S = ab$. ▲

ВІДОМОСТІ З КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

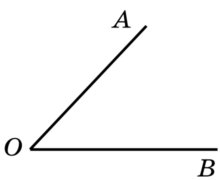
Елементарні геометричні фігури та їх властивості

Основними геометричними фігурами на площині є *точка* і *пряма*.

Відрізком називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома її точками, разом із цими точками. На малюнку 257: відрізок AB, точки A і B – *кінці відрізка*.

Мал. 257

Мал. 258



Мал. 259

Точка A ділить пряму на дві частини (мал. 258). Кожну з отриманих частин разом з точкою A називають *променем*, що виходить із точки A. Тому A називають *початком* кожного з променів.

Два промені, що мають спільний початок та доповнюють один одного до прямої, називають *доповняльними*.

Кут – це геометрична фігура, яка складається з двох променів, що виходять з однієї точки. Промені називають *сторонами кута*, а їх спільний початок – *вершиною кута*. На малюнку 259: кут AOB, точка O – його вершина; OA і OB – сторони кута. Записати цей кут можна так: $\angle AOB$; $\angle BOA$; $\angle O$.

Бісектрисою кута називають промінь, який виходить з вершини кута, проходить між його сторонами і ділить його навпіл.

Аксіоми планіметрії

I. Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

II. Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.

III. Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

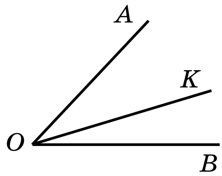
IV. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.

V. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які його розбиває будь-яка його внутрішня точка. (На малюнку 260: $AB = AC + CB$.)

VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює $180°$.

VII. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які його розбиває будь-який промінь, що проходить між його сторонами. $\angle AOB = \angle AOK + \angle KOB$ (мал. 261).

Мал. 260



Мал. 261

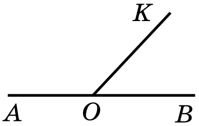
Суміжні та вертикальні кути

Два кути називають *суміжними*, якщо одна сторона в них спільна, а дві інші є доповняльними променями.

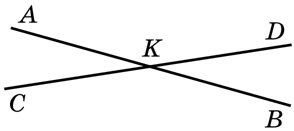
На малюнку 262: кути $\angle AOK$ і $\angle KOB$ – суміжні.

Властивість суміжних кутів. Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного з них є доповняльними променями сторін другого.



Мал. 262



Мал. 263

На малюнку 263: $\angle AKC$ і $\angle DKB$ – вертикальні, кути $\angle AKD$ і $\angle CKB$ також вертикальні.

Властивість вертикальних кутів. Вертикальні кути рівні.

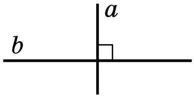
Перпендикулярні і паралельні прямі

Дві прямі називають *взаємно перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

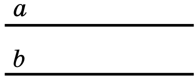
На малюнку 264: прямі a і b – перпендикулярні.

Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

На малюнку 265: прямі a і b – паралельні.



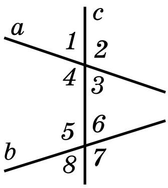
Мал. 264



Мал. 265

Основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельності прямих). Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Кути, що утворилися при перетині двох прямих січною. Ознаки та властивість паралельності прямих. Властивості кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною



Мал. 266

Пряму *c* називають *січною* для прямих *a* і *b*, якщо вона перетинає їх у двох точках (мал. 266).

Пари кутів *4* і *5*; *3* і *6* називають *внутрішніми односторонніми кутами*; пари кутів *4* і *6*; *3* і *5* – *внутрішніми різносторонніми*; пари кутів *1* і *5*; *2* і *6*; *3* і *7*; *4* і *8* – *відповідними кутами*.

Ознаки паралельності прямих.

1. Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.
2. Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні.
3. Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.
4. Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

Властивість паралельних прямих. Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні одна одній.

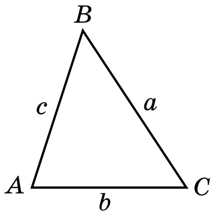
Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною

1. Відповідні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, рівні між собою.
2. Внутрішні різносторонні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, рівні між собою.
3. Сума внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 180°.

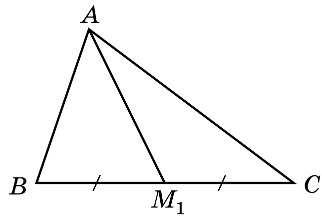
Трикутник і його елементи

Трикутником називають фігуру, що складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки (мал. 267).

Точки *A*, *B*, *C* – *вершини трикутника*; відрізки $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ – *сторони трикутника*; $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle BCA$ – *кути трикутника*.



Мал. 267



Мал. 268

Периметром трикутника називають суму довжин усіх його сторін. $P_{ABC} = AB + BC + CA$.

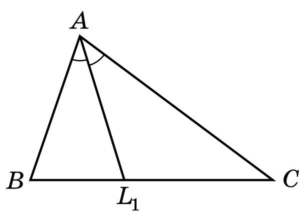
Медіаною трикутника називають відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

На малюнку 268: AM_1 – медіана трикутника ABC.

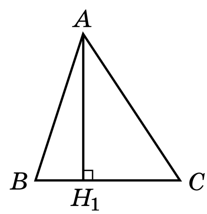
Бісектрисою трикутника називають відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.

На малюнку 269: AL_1 – бісектриса трикутника ABC.

Висотою трикутника називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.



Мал. 269



Мал. 270

На малюнку 270: AH_1 – висота $\triangle ABC$.

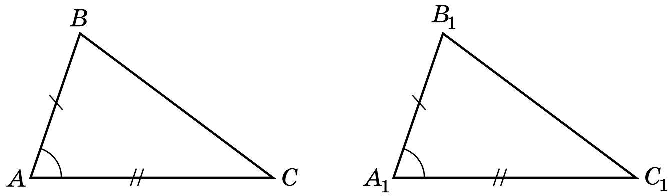
Сума кутів трикутника дорівнює $180°$.

Нерівність трикутника. Кожна сторона трикутника менша за суму двох інших сторін.

У трикутнику: 1) проти більшої сторони лежить більший кут; 2) проти більшого кута лежить більша сторона.

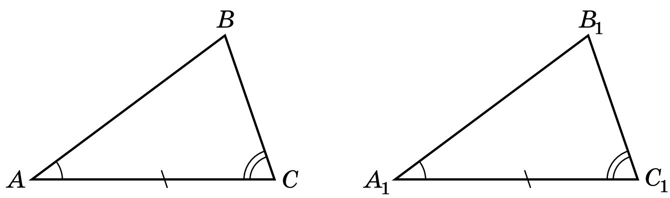
Ознаки рівності трикутників

Перша ознака рівності трикутників (за двома сторонами і кутом між ними). Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні (мал. 271).



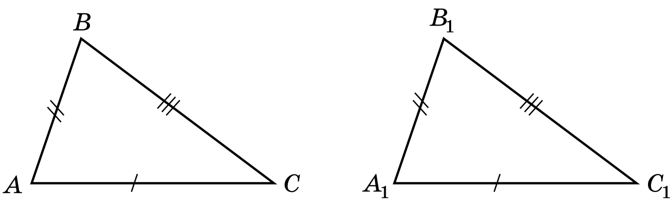
Мал. 271

Друга ознака рівності трикутників (за стороною і двома прилеглими до неї кутами). Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні (мал. 272).



Мал. 272

Третя ознака рівності трикутників (за трьома сторонами). Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють трьом сторонам другого, то такі трикутники рівні (мал. 273).



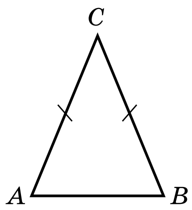
Мал. 273

Види трикутників

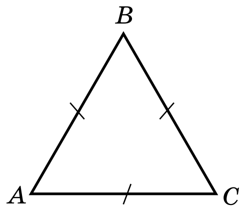
Трикутник називають *рівнобедреним*, якщо в нього дві сторони між собою рівні.

На малюнку 274: $\triangle ABC$ – рівнобедрений; AC і BC – його *бічні сторони*; AB – *основа*.

Властивість кутів рівнобедреного трикутника. У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.



Мал. 274



Мал. 275

Ознака рівнобедреного трикутника. Якщо у трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.

Трикутник, усі сторони якого між собою рівні, називають *рівностороннім*.

На малюнку 275: $\triangle ABC$ – рівносторонній.

Властивість кутів рівностороннього трикутника. Усі кути рівностороннього трикутника дорівнюють по $60°$.

Ознака рівностороннього трикутника. Якщо у трикутнику всі кути рівні, то він рівносторонній.

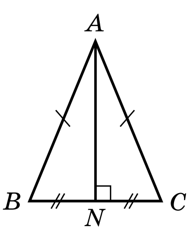
Трикутник, усі сторони якого різняться довжиною, називають *різностороннім*.

Властивість бісектриси рівнобедреного трикутника. У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.

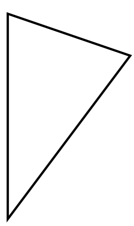
На малюнку 276: бісектриса AN, проведена до основи BC рівнобедреного трикутника ABC, є також медіаною і висотою.

Залежно від кутів розглядають такі види трикутників:

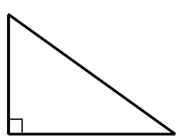
- *гострокутний* (усі кути якого гострі – мал. 277);
- *прямокутний* (один з кутів якого прямий, а два інші – гострі – мал. 278);
- *тупокутний* (один з кутів якого тупий, а два інші – гострі – мал. 279).



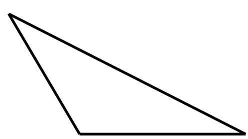
Мал. 276



Мал. 277



Мал. 278



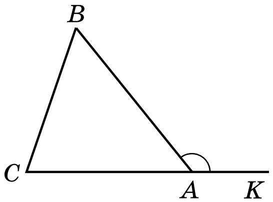
Мал. 279

Зовнішній кут трикутника

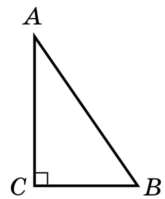
Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний з кутом цього трикутника.

На малюнку 280: $\angle BAK$ – зовнішній кут трикутника ABC.

Властивість зовнішнього кута трикутника. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним, тобто $\angle BAK = \angle B + \angle C$.



Мал. 280



Мал. 281

Прямокутні трикутники

Якщо $\angle C = 90°$, то $\triangle ABC$ – прямокутний (мал. 281). AC і BC – *катети прямокутного трикутника*; AB – *гіпотенуза прямокутного трикутника*.

Властивості прямокутних трикутників.

1. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.
2. Гіпотенуза більша за будь-який з катетів.
3. Катет, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.
4. Якщо катет дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.
5. У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.

Ознаки рівності прямокутних трикутників.

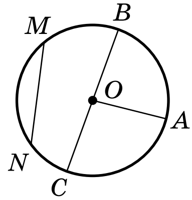
1. *За двома катетами.* Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.
2. *За катетом і прилеглим до нього гострим кутом.* Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього куту другого, то такі трикутники рівні.
3. *За гіпотенузою і гострим кутом.* Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі і гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

4. *За катетом і протилежним кутом*. Якщо катет і протилежний кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному куту другого, то такі трикутники рівні.
5. *За катетом і гіпотенузою*. Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гіпотенузі другого, то такі трикутники рівні.

Коло і круг

Колом називають геометричну фігуру, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (мал. 282).

Цю точку називають *центром кола*; відрізок, що сполучає точку кола з його центром, називають *радіусом кола*.



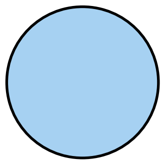
Мал. 282

На малюнку 282 точка O – центр кола, OA – радіус кола.

Відрізок, що сполучає дві точки кола, називають *хордою*. Хорду, що проходить через центр кола, називають *діаметром*.

На малюнку 282 MN – хорда, BC – діаметр.

Частину площини, обмежену колом, разом із самим колом, називають *кругом* (мал. 283).


Мал. 283

Центром, радіусом, діаметром, хордою круга називають відповідно центр, радіус, діаметр, хорду кола, яке обмежує круг.

Властивості елементів кола.

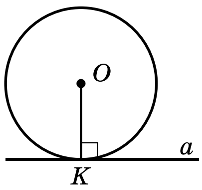
1. Діаметр кола вдвічі більший за його радіус.
2. Діаметр є найбільшою з хорд.
3. Діаметр з будь-якої точки кола видно під прямим кутом.
4. Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.
5. Діаметр кола, що проходить через середину хорди, яка не є іншим діаметром, перпендикулярний до цієї хорди.

Дотичною до кола називають пряму, яка має одну спільну точку з колом. Цю точку називають *точкою дотику*.

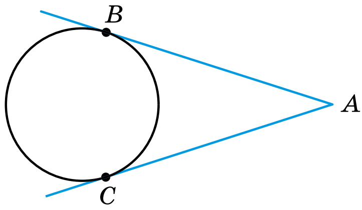
На малюнку 284 пряма a – дотична до кола, точка K – точка дотику.

Властивість дотичної. Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки. Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою. На малюнку 285 $AB = AC$.



Мал. 284

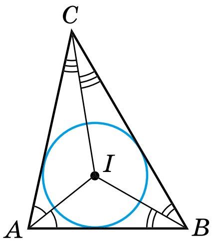


Мал. 285

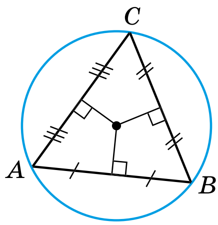
Коло, вписане у трикутник

Коло називають *вписаним у трикутник*, якщо воно дотикається до всіх його сторін. При цьому трикутник називають *описаним навколо кола* (мал. 286).

У будь-який трикутник можна вписати коло. Центром кола, вписаного у трикутник, є точка перетину бісектрис цього трикутника.



Мал. 286



Мал. 287

Коло, описане навколо трикутника

Коло називають *описаним навколо трикутника*, якщо воно проходить через усі вершини трикутника. При цьому трикутник називають *вписаним у коло* (мал. 287).

Навколо будь-якого трикутника можна описати коло. Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.

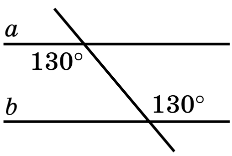
ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

1. Точка N належить відрізку $AB = 7{,}6$ см. Знайдіть довжини відрізків AN і NB, якщо:
1) AN утричі більший за NB;
2) NB більший за AN на 2,6 см.

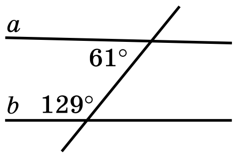
2. Знайдіть градусні міри суміжних кутів, якщо вони відносяться як 4 : 5.

3. Знайдіть градусні міри кожного з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, якщо сума двох з них дорівнює 162°.

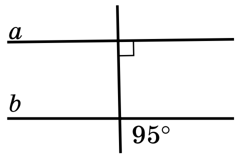
4. Чи є прямі a і b на малюнках 288–290 паралельними?



Мал. 288



Мал. 289

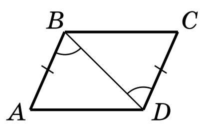


Мал. 290

5. Один із кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 70°. Знайдіть інші сім кутів.

6. Одна зі сторін трикутника – удвічі менша від другої і на 4 см менша за третю. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо його периметр дорівнює 24 см.

7. Дано: $AB = CD$, $\angle ABD = \angle BDC$ (мал. 291). Довести: $\triangle ABD = \triangle CDB$.



Мал. 291

8. Накресліть різносторонній гострокутний трикутник ABC. Проведіть у ньому медіану AM, висоту AH, бісектрису AL.

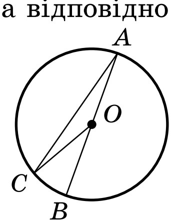
9. Знайдіть кут при вершині рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі дорівнює 54°.

10. У трикутнику ABC проведено бісектрису BL. Знайдіть $\angle A$, якщо $\angle C = 80°$, $\angle LBC = 35°$.

11. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника відповідно дорівнюють 120° і 140°. Знайдіть градусну міру кожного з його внутрішніх кутів.

12. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо один з них у 8 разів менший від другого.

13. На малюнку 292 точка O – центр кола, $\angle CAO = 15°$. Знайдіть $\angle COB$.



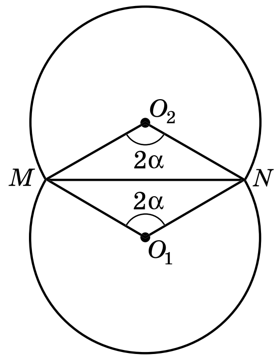
Мал. 292

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

Розділ 1

16. 10 см, 12,5 см, 20 см, 22,5 см. **17.** 60°, 75°, 105°, 120°. **18.** 105°, 75°, 90°. **19.** 21 см, 9 см, 6 см. **22.** Так, якщо чотирикутник неопуклий. **23.** Два розв'язки. **24.** Два розв'язки. **26.** 6 см. **28.** 70°, 70° і 40° або 70°, 55° і 55°. **29.** 10 см. **33.** $n = 4$. **49.** 14 см. **54.** 96°, 84°. **55.** 34 см. **56.** $BP = 4$ см, $PC = 8$ см. **62.** 28 см. **63.** 24 см. **64.** 40°. **65.** 110°. **66.** 7 см, 13 см. **67.** 9 см, 30 см. **68.** 1) 75°; 2) 105°. **69.** 1) 96°; 2) 84°. **72.** 9 см. **74.** Ні. **94.** 1) 55°; 2) 50°. **95.** 1) 30°; 2) 40°. **96.** 160°. **97.** 40°. **100.** 52 см. **101.** 60 см. **102.** 48 дм. **103.** 1) $DB = 4a$, $AB = 2a$; 2) $AK = \frac{m}{4}$, $CD = \frac{m}{2}$. **104.** $BD = 2b$, $OK = \frac{b}{2}$. **105.** 50 см. **106.** 40 см. **108.** 1) 60°; 2) 90°. **109.** В к а з і в к а. Побудуйте паралелограм, одна з вершин якого точка B, дві інші лежать на сторонах кута, а точка P є точкою перетину діагоналей. **111.** Ні. **134.** 80° і 100°. **135.** 72° і 108°. **140.** 70° і 110°. **141.** 130° і 50°. **142.** 1) 60°, 120°; 2) $4a$ см. **143.** 1) 60°, 120°; 2) $4b$ см. **146.** 60 см. **148.** 10 см. **149.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **150.** Паралелограм. **152.** В к а з і в к а. Розгляньте $\triangle AMK$, де MK – діаметр кола. **171.** 24 см. **172.** 4 см. **176.** $2b$ см. **177.** 9 см. **180.** $\angle A = 20°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$, $\angle D = 200°$. Неопуклий. **181.** $AB = 15$ см, $AD = 40$ см. **183.** $65\frac{5}{11}$ хв. **197.** 1) Так; 2) ні. **198.** 1) Так; 2) ні. **199.** Ні. **207.** Рівнобічна. **208.** 8 см. **209.** 36 см. **210.** 70° і 110°. **211.** 40° і 140°. **215.** 9 см і 5 см. **217.** 60° і 120°. **218.** 72° і 108°. **220.** 2 : 1. **221.** 2 : 1. **222.** В к а з і в к а. Нехай $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AB = d$. Через вершину C проведіть $CM \parallel AB$, $M \in AD$. Тоді $MD = a - b$. $\triangle CMD$ можна побудувати. **224.** 20 см. **229.** У точці перетину діагоналей чотирикутника. **236.** 108°. **237.** 116°. **238.** 120°, 60°. **239.** 30°. **240.** 80°. **242.** 40°. **244.** 40°, 70°, 70°, або 40°, 40°, 100°, або 140°, 20°, 20°. **245.** 50°, 65°, 65°, або 50°, 50°, 80°, або 130°, 25°, 25°. **246.** Коло, діаметром якого є гіпотенуза трикутника без точок, що є кінцями гіпотенузи. **248.** b і $a - b$. **250.** Так. **258.** 4 см. **259.** 20 дм. **262.** $5R$. **263.** $180° - \alpha$, $180° - \alpha$, $2\alpha - 180°$. **264.** $\frac{\alpha}{2}$, $90° - \frac{\alpha}{4}$, $90° - \frac{\alpha}{4}$, або $180° - \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{4}$. **275.** $A_1A_2 = A_2A_3 = 12$ см, $B_1B_2 = B_2B_3 = 20$ см. **276.** $ON_2 = 42$ см, $OM_2 = 24$ см. **278.** В к а з і в к а. Проведіть через точки E, F, D прямі, паралельні CG. **279.** В к а з і в к а. Проведіть через точки M і D прямі, паралельні BN. **280.** 1 : 2. В к а з і в к а. Проведіть через точку D пряму, паралельну BM. **282.** 10 см і 14 см. **297.** 40 см, 30 см, 50 см. **298.** 16 см, 36 см, 28 см. **299.** 12 см і 18 см або 12 см і 8 см. **300.** 26 см. **301.** 20 см. **305.** $4a$ см. **306.** 5 см. **308.** 6 см.

309. 12 см. **311.** 28 см. **312.** 1) $a - b$; 2) $3a - b$; 3) $a = 3b$. **313.** Ні. **328.** 21 см і 25,5 см. **329.** $BC = 4$ см, $AD = 20$ см. **330.** 7 см. **331.** 10 см. **332.** 3 см. **333.** 13 см. **334.** 3 см, 4 см, 3 см. **335.** 14 см і 30 см. **336.** 9 см. **337.** 44 см. **338.** 32 см. **340.** $4a$ см. **341.** 10 см. **347.** 60°, 70°, 110°, 120°. **354.** Ні. **355.** В к а з і в к а. Доведіть, що $ABNM$ – паралелограм. **356.** Три. **359.** 4 см, 10 см. **365.** 24 см. **366.** 12 см, 16 см. **367.** $\frac{\alpha}{2}$ см. **368.** 46 см або 38 см. **373.** Усі сторони по $\frac{m}{4}$ см. **374.** 100° і 80°. **375.** 1) 30°, 150°; 2) 15°. **381.** Так. **382.** Квадрат. **383.** $2d$ см. **388.** 80°, 100°. **390.** m см. **391.** 36 см. **392.** $BC = 5$ см, $CD = 5$ см. **393.** 19 см. **394.** 72° і 108°. **395.** В к а з і в к а. Проведіть через одну з вершин меншої основи трапеції пряму, паралельну діагоналі, до перетину з більшою основою. Побудуйте трикутник, дві сторони якого – діагоналі трапеції, а третя – сума основ. **396.** 36 см. **400.** 2 см. **402.** 90°, 54°, 90°, 126°. **403.** В к а з і в к а. Шукане геометричне місце точок – дві дуги кіл із центрами O_1 і O_2, з яких MN видно під кутом 2α (мал. 293). **407.** 30°. **408.** 60°, 80°, 120°, 100°. **409.** 62°. **410.** $6a$ см. **421.** 10 см і 14 см. **422.** 36 см, 18 см. **424.** Квадрат, $P = 2d$ (см). **428.** 18 см, 16 см, 14 см. **429.** 12 см і 24 см. **430.** 6 см і 30 см. **431.** 5 : 2. **433.** $\left(a - \frac{c}{2}\right)$ см.



Мал. 293

Розділ 2

443. $OB = 6$, $BD = 9$. **444.** $OA = 2{,}5$, $AC = 3{,}5$. **445.** 2 : 3. В к а з і в к а. Проведіть через точку P пряму, паралельну CM. **446.** 5 : 6. В к а з і в к а. Проведіть через точку D пряму, паралельну BM. **447.** 16 см. **448.** 3 : 4. **452.** 9. **461.** 1) 24 см, 27 см; 2) 35 см, 40 см, 45 см; 3) 14 см, 16 см, 18 см. **462.** 1) 10 см, 12 см; 2) 15 см, 18 см, 27 см; 3) 25 см, 30 см, 45 см. **464.** 4 см, 6 см, 8 см і 6 см, 9 см, 12 см. **465.** 12 см, 16 см, 20 см і 9 см, 12 см, 15 см. **469.** Ні. **492.** Так. **493.** Так. **496.** $AD = 28$ см, $BC = 16$ см. **497.** $BO = 2{,}5$ см, $OD = 5{,}5$ см. **498.** 1) Так; 2) так; 3) 3 см. **499.** $3\frac{1}{3}$ см. **500.** 24 см. **501.** $\triangle ABC \sim \triangle BDC$. **502.** $\triangle ABC \sim \triangle DBA$. **503.** 20 см, 35 см, 35 см або 42 см, 24 см, 24 см. **504.** 30 см, 48 см, 48 см або 35 см, 35 см, 56 см. **507.** 9 см. **508.** 3 см. **509.** $\frac{ab}{a+b}$ см. **510.** 7,5 см і 4,5 см. **511.** 5 см і 10 см. **512.** 6 см. **513.** 4,2 см. **516.** $2a$ см. **518.** Так; 15°. **532.** 24 см. **533.** 24 см. **534.** 30 см і 40 см. **535.** 12 см. **536.** 2 см.

537. 3 см. **538.** 6 см. **539.** 12 см. **540.** 36 см. **542.** Так. **550.** 7 см. **551.** 9 см. **552.** $BL = 10$ см, $LC = 8$ см. **553.** 21 см. **554.** 90 см. **555.** 36 см. **556.** 10 см і 14 см. **557.** $AL = 12$ см, $LB = 8$ см. **558.** Ні. **559.** В к а з і в к а. Доведіть, що $\triangle CHB \sim \triangle AHC$. **569.** 15 см. **570.** 9 см. **571.** 9 м. **572.** 8 м. **573.** 42 м. **574.** 20 см. **575.** 16 см. **576.** 8 см. **577.** 6 см. **578.** 5 см. **579.** 26 см. **580.** 26 см. **582.** 10 см. В к а з і в к а. Використайте формулу $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL$ із задачі 1, § 17. **586.** 12 см, 16 см, 24 см. **587.** $\frac{a^2 - b^2}{4}$. **588.** 1) Ні; 2) ні. **592.** 9 : 4. В к а з і в к а. Проведіть через точку E пряму, паралельну AD. **595.** 1) 52 см; 2) 65 см. **596.** Так. **604.** 15 см. **607.** 30 см. **612.** $BM = 20$ см, $P = 80$ см. **613.** 70 см. **614.** 16 см і 12 см. **615.** 13 см і 5 см. **618.** 42 см. **619.** 14 см і 16 см. **620.** $\angle ACD < \angle BCD$. **621.** 36 см, 36 см, 18 см. **625.** $AK = 5$ см, $AP = 20$ см, $KP = 15$ см. **626.** $8\frac{2}{3}$ см. **627.** $AB = 6$ см, $BC = 7{,}5$ см.

Розділ 3

652. $\sqrt{11}$ см або $\sqrt{61}$ см. **653.** $\sqrt{21}$ см або $\sqrt{29}$ см. **654.** 20; 16; $\sqrt{14}$; 13. **655.** 6; 10. **656.** 112 см. **657.** 80 см. **658.** 24 см. **659.** 30 см. **660.** 28 см. **661.** 11 см. **662.** $\sqrt{26}$ см. **663.** $\sqrt{50}$ см. **664.** 3 см і $\sqrt{73}$ см. **665.** $\sqrt{1850}$ см $= 5\sqrt{74}$ см. **666.** $\sqrt{468}$ см $= 6\sqrt{13}$ см. **669.** 90 см. **670.** 84 см. **671.** 30 см. **672.** 5 см. **674.** 162 см. **675.** 80 см. **676.** 6 см. **677.** 40 см. **678.** 60°; 60°; 120°; 120°. **682.** Так. **695.** 17 см або 3 см. **696.** 21 см або 9 см. **697.** 30°. **698.** 45°. **699.** 12 см. **700.** 10 см. **701.** 2 см; 10 см; $\sqrt{96}$ см $= 4\sqrt{6}$ см. **702.** 5 см; 7 см; $\sqrt{24}$ см $= 2\sqrt{6}$ см. **703.** 6,6 см; 8,4 см. **704.** 3,4 см; 21,6 см. **705.** 90°. **706.** 10 см. **707.** 4 см. **709.** 1) 90°; 30°; 60°; 2) 90°; 45°; 45°. **710.** 11 ярдів. **731.** $2a(1 + \operatorname{tg}\beta)$. **732.** $\frac{b^2}{\operatorname{tg}\alpha}$. **733.** 15,63 см. **734.** 12,43 см. **735.** $c\sin\alpha\cos\alpha$. **736.** $\frac{h}{\sin\beta\cos\beta}$. **737.** 39° і 51°. **738.** 61° і 29°. **739.** 1) $AB = 10$ см; $BC = 8$ см. В к а з і в к а. Оскільки $\angle B = \frac{4}{5}$, то $\frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$. Позначте $BC = 4x$; $AB = 5x$; 2) $AC = 12$ см; $BC = 5$ см. **740.** 1) $AB = 5$ см; $BC = 3$ см; 2) $AC = 16$ см; $BC = 30$ см. **741.** $\frac{a-b}{\cos\alpha}$. **742.** $BC = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta}$; $CK = \frac{b\cos\gamma}{\operatorname{tg}\beta}$; $BK = \frac{b\sin\gamma}{\operatorname{tg}\beta}$. **743.** $BC = \frac{a}{\sin\alpha}$; $AC = \frac{a\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}$; $AB = \frac{a}{\sin\alpha\cos\beta}$. **744.** 41°36′. **745.** 79°36′ і 100°24′. **746.** $m\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

747. $\dfrac{r}{\cos\beta \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}$. **748.** $10(\sqrt{2}-1)$ см. **749.** $4\sqrt{3}$ см. **750.** $5(\sqrt{3}+1)$ см. **751.** $4(3-\sqrt{3})$ см. **753.** 48 см. **764.** 1) $AB = 8$ см, $\angle B = 30°$, $\angle A = 60°$; 2) $AC = 17$ дм, $\angle B \approx 28°4'$, $\angle A \approx 61°56'$; 3) $AB = 3\sqrt{10}$ см $\approx 9{,}49$ см, $\angle A \approx 71°34'$, $\angle B \approx 18°26'$; 4) $AB = 25m$ дм, $\angle A \approx 73°44'$, $\angle B \approx 16°16'$. **765.** 1) $AB = 4$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$; 2) $AB = 10$ см, $\angle A \approx 36°52'$, $\angle B \approx 53°8'$; 3) $AB = \sqrt{29}$ дм $\approx 5{,}39$ дм, $\angle A \approx 68°12'$, $\angle B \approx 21°48'$; 4) $AB = 41k$ дм, $\angle A \approx 77°19'$, $\angle B \approx 12°41'$. **766.** 1) $BC = 3$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$; 2) $AC = 63$ дм, $\angle A \approx 14°15'$, $\angle B \approx 75°45'$; 3) $BC = \sqrt{33}$ см $\approx$ $\approx 5{,}74$ см, $\angle A \approx 55°9'$, $\angle B \approx 34°51'$; 4) $AC = 12a$ см, $\angle A \approx 22°37'$, $\angle B \approx 67°23'$. **767.** 1) $BC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle A = \angle B = 45°$; 2) $AC = 35$ дм, $\angle A \approx 18°55'$, $\angle B \approx 71°5'$; 3) $BC = \sqrt{51}$ см $\approx 7{,}14$ см, $\angle A \approx 45°34'$, $\angle B \approx 44°26'$; 4) $AC = 11b$ дм, $\angle A \approx 79°37'$, $\angle B \approx 10°23'$. **768.** $62°32'$. **769.** $\alpha \approx 1°9'$. **770.** $\approx 4{,}29$ м. **771.** $x = \dfrac{l}{2}$ м. **773.** 36 см. **774.** 42 см. **775.** 18 прямих; 28 прямих. **782.** 52 см. **783.** 6 см; $\sqrt{244}$ см $=$ $= 2\sqrt{61}$ см. **784.** 72 см. **785.** 32 см. **786.** 78 см. **787.** 105°. **788.** 90°. **789.** 120 см. **793.** 7 см або 1 см. **794.** 26 см; 30 см; 24 см. **795.** 3,2 см. **799.** $4R(\sin\alpha + \cos\alpha)$. **800.** 31,11 см. **801.** $CK = b\sin\alpha$; $KB = b\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha$. **802.** 50 см. **803.** $r\left(1+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}\right)$. **804.** $\sqrt{3}$ см; $2\sqrt{43}$ см; $2\sqrt{31}$ см. **805.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ см або $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ см. **809.** $\dfrac{a\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$.

Розділ 4

822. 140°. **823.** 120°. **826.** Ні. **827.** Ні. **828.** 72°, 96°, 120°, 120°, 144°, 168°. **829.** 88°, 98°, 108°, 118°, 128°. **830.** 1) Так, 8 сторін, 20 діагоналей; 2) ні. **831.** 1) Ні; 2) так, 9 вершин, 27 діагоналей. **832.** 12. **833.** Чотирикутник. **834.** Так, це п'ятикутник. **835.** 12. **836.** 15. **837.** Периметри рівні. **838.** $\dfrac{P}{4}$ см. **855.** 60 см^2. **856.** 120 см^2. **857.** 1) 32 см^2; 2) $\dfrac{1}{2}d^2$. **858.** 16 см^2. **859.** 6 см. **860.** 10 см. **861.** 3) Збільшиться в 16 разів; 4) збільшиться в 10 разів; 5) збільшиться в 6 разів. **863.** Ні. **864.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **865.** 8 см. **866.** 10 дм. **867.** 208. **868.** $4r^2$. **869.** 9 см і 12 см. **870.** 20 см. **871.** 24 см^2. **872.** 84 см^2. **873.** 108 см^2. **874.** 168 см^2. **876.** $\sqrt{5}$. **877.** 9. **878.** Так. **881.** 8. **892.** 2,4 см. **893.** 10 см. **894.** 60 см^2.

895. 8 см^2. **896.** 6 см. **897.** 15 см. **898.** $\frac{P^2}{32}$ см^2. **899.** 72 см^2. **900.** 12 см^2. **901.** 96 см^2. **902.** 1) Ні; 2), 3) так. **903.** 8 см або 4,5 см. **904.** На 3 вершини. **905.** 15 см^2. **907.** 18. **918.** 16 см^2. **919.** 36 см^2. **920.** 1) 40 см^2; 2) $\frac{d_1d_2}{2}$. **921.** 36 см^2. **922.** 15 см^2; 30 см^2. **923.** 8 см. **924.** 12 см. **925.** 4 см^2 і 8 см^2. **926.** 5 см^2 і 15 см^2. **928.** 7,5 см^2. **929.** 40 см^2. **930.** 4,8 см. **931.** 6,72 см. **932.** 54 см^2. **933.** 60 см^2. **934.** 1) і 2) Так; 3) ні. **935.** 1 : 2. **936.** 1 : 4. **938.** 128 см^2. **940.** 25 кроків. **955.** 64 см^2. **956.** 45 см^2. **957.** 3 см і 9 см. **958.** 5 см і 20 см. **959.** $\frac{(a+b)c}{4}$. **960.** 54 см^2. **961.** 24 см^2. **962.** 40 см^2. **963.** 80 см^2. **964.** 1080 см^2. **965.** 156 см^2. **966.** 30 см^2. **967.** 62,5 см^2. **968.** 181,5 см^2. **969.** h^2 см^2. **970.** 49 см^2. **971.** 18 см^2. **975.** 50 см. Вказівка. Треба розглянути два випадки розташування квадратів. **978.** По 108°. **979.** 20. **980.** 8. **981.** Збільшиться на 360°. **982.** $k = 2$. **986.** 1) $\frac{P^2}{16}$ см^2; 2) $4\sqrt{S}$ см; 3) 4. **988.** 144. **989.** 36 см^2 або 45 см^2. **990.** mn. **993.** 10 см^2. **994.** 1) Так; 2) ні. **995.** Квадрат, у 2 рази. **996.** 16 см^2. **997.** 320 см^2. **999.** 6 см. **1000.** 6 см^2. **1006.** $\frac{3a^2}{2}$ см^2. **1007.** $\frac{3b^2}{2}$ см^2. **1008.** У 3 рази. **1009.** 80 см^2.

Задачі підвищеної складності

1012. 60°; 120°. **1014.** Ромб. **1015.** 120°. **1016.** 90°. **1018.** Кожна з діагоналей дорівнює $a - b$. **1020.** $BP = DM$. **1022.** 40 см. **1023.** 140°, 40°, 140°. **1024.** $\frac{a-b}{2}$. **1025.** 53°. **1026.** A, H_3, H, H_2; B, H_3, H, H_1; C, H_1, H, H_2; A, H_3, H_1, C; A, H_2, H_1, B; B, H_3, H_2, C. **1028.** Вказівка. Довести, що $BN \cdot DM = CB \cdot CD$. **1029.** $\sqrt{ab}$. **1030.** 1) 21 см, або 28 см, або 24 см; 2) 21 см або 27 см; 3) 21 см. Вказівка. Нехай AB – найбільша сторона трикутника. Пряма, що відтинає трикутник, подібний даному, може перетинати або сторону BC, або сторону AC, причому слід окремо розглянути випадок, коли ця пряма паралельна одній зі сторін трикутника. **1031.** Необхідно побудувати коло, що проходить через точки B і C та дотикається до AB у точці B. Це коло перетне AC у шуканій точці D. **1032.** 12,5 см. Вказівка. Через вершину C проведіть пряму, паралельну BD, що перетинає продовження AD у точці M, $\triangle ACM$ – прямокутний. **1034.** $2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$. Вказівка. Нехай MA і MB перпендикуляри, проведені до прямих, що містять сторони кута, а C – точка перетину AM і OB. Розгляньте трикутники BMC і OAC.

1037. $12m$. **1038.** Доведіть, що $(c+h)^2 = (a+b)^2 + h^2$. **1039.** $\frac{ac}{b}$. **1040.** 1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Вказівка. Розгляньте рівнобедрений прямокутний трикутник ABD ($\angle D = 90°$) і прямокутний трикутник BDC ($\angle D = 90°$), у якого $\angle DBC = 30°$. Точки A, D, C лежать на одній прямій. Тоді $\angle ABC = 75°$. **1041.** 1) Так; 2) ні. **1042.** 6. **1045.** У 3 рази. **1047.** 54 см^2. **1048.** $\frac{5}{9}S$. **1049.** $(m+n)d$. **1050.** cd. Вказівка. Доведіть, що $S_{KCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. **1051.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ «ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА»

№ завдання / № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Б	В	В	А	Г	Б	Г	В	В	Б	Б	Г
2	Б	В	Б	Г	Б	А	В	Г	В	Б	А	Г
3	Б	Г	В	А	В	Б	Г	Б	А	В	В	А
4	В	Б	А	Б	Г	В	Б	Б	Г	В	А	В
5	Б	В	А	Г	В	Г	Б	А	В	Г	Б	В

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ ДОДАТКА 1 «ГОТУЄМОСЯ ДО ЗНО»

Тема	Чотирикутники			Подібність трикутників		Розв’язування прямокутних трикутників		
№ задачі	1	2	3	4	5	6	7	8
Відповідь	Б	В	13	Б	15	Д	42	18

Тема	Многокутники. Площі многокутників				
№ задачі	9	10	11	12	13
Відповідь	Д	24	128	4	864

ВІДПОВІДІ ДО ВПРАВ НА ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

1. 1) $NB = 1{,}9$ см; $AN = 5{,}7$ см; 2) $AN = 2{,}5$ см, $NB = 5{,}1$ см. **2.** 80°, 100°. **3.** 81°, 99°, 81°, 99°. **4.** На мал. 288 – так, на мал. 289, 290 – ні. **5.** Три кути по 70°, чотири – по 110°. **6.** 5 см, 9 см, 10 см. **9.** 72°. **10.** 30°. **11.** 60°, 40°, 80°. **12.** 10°, 80°. **13.** 30°.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК